BOUWSTOFFEN

VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

(DEEL II. N°. 1.)

(MET 5 KAARTEN).

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1893.

BOUWSTOFFEN

VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

(DEEL II. N°. 1.)

(MET 5 KAARTEN).

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1893.

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

N°. XXXIII. CONSTANTIJN HUYGENS, als *Waterbouwkundige*, MICHAEL FLORENTZ. VAN LANGREN.

1. Het is bekend, dat CONSTANTIJN HUYGENS, de vader van CHRISTIAAN HUYGENS, uitgebreide briefwisseling hield, — niet alleen die, welke zijne betrekking als secretaris der drie stadhouders hem oplegde, maar ook zijne eigene, over allerlei takken van kunst en wetenschap. Dezer dagen kwam mij een waterbouwkundig ontwerp van den ingenieur MICHAEL FLORENTZ. VAN LANGREN onder de oogen, waarbij ook brieven van onzen CONSTANTIJN HUYGENS voorkwamen; die stukken zijn afkomstig uit het legaat J. T. BODEL NIJENHUIS, berustende in de Leidsche Universiteits Bibliotheek. Door de welwillendheid van den Heer ARNOLD, Conservator der Bibliotheek te Gend, die mij verschillende andere stukken toezond, werd ik in staat gesteld dit onderwerp nader te onderzoeken. Die geheele zaak is ook niet van belang ontbloot voor de geschiedenis der waterbouwkunde; derhalve moge hier het een en ander daarover volgen. Doch zien wij eerst, welke de betrekking is tusschen den geleerde en den ingenieur.

2. In 1580 vestigde zich te Arnhem een zekere JAKOB FLORISZ. LANGREN [of LANGEREN], een kaartgraveur. Deze, met zijn zoons ARNOLD FLORENTIUS en HENDRIK FLORENTIUS VAN LANGREN, graveerde de kaarten voor het Reis-geschrift [1]) van J. M. VAN LINSCHOOTEN [2]), dat in 1595 het licht zag. Omstreeks 1600 verliet de geheele familie, die streng roomsch catholiek was, en, naar het schijnt, het protestansche Noord-Nederland weinig genegenheid toedroeg, deze

Verhand. Kon. Akad. v. Wetensch. (1e Sectie). Dl. II.

gewesten, om zich te Antwerpen te vestigen. De oudste zoon Arnold Florentius, die Tycho Brahé bij zijne waarnemingen had bijgestaan, werd door de aartshertogen Ferdinand en Isabella tot hun spherograaf [of wiskundige] benoemd, en vestigde zich in 1600 te Brussel. Later verkreeg hij diezelfde betrekking bij koning Philips IV tegen een jaargeld van 300 ℔ Artois [fl. 1800]. In 1609 leverde hij aan de stad Antwerpen voor 120 ℔ een „sphera mundi" en in 1620 twee „spherae" eene van den aardbol, eene van den hemel; waarbij hij eene verhandeling [3]) schreef, die echter ongedrukt gebleven is.

Met den vader Arnold Florentius, kwam ook zijn zoon Michael Florentius van Langren te Brussel. Hij werd daar, na den dood van zijn vader, cosmograaf of wiskundige van den koning, woonde daar in het Warmoesbroeck, later in de Hoogstraet bij de Roode Poort, en overleed er in het begin van Mei 1675. Hij schreef eerst, in 1644, over de zoogenaamde bepaling van Oost en West [4]) en gaf daarop in 1645 een nieuwe maankaart [5]), waarbij hij aan de verschillende vlekken, enz. namen gaf van beroemde personen. Onder deze vindt men ook onzen Constantijn Huygens [6]). En deze antwoordt daarop met een gedicht, dat voorkomt in de Momenta Desultoria 1655 [7]), Epigrammatum Liber X, pag. 336, dat aldus luidt:

In M. F. Langreni Σελενοδασμον.

„Parcite virginea naevos in fronte Dianae
„Quaerere, qui radiis itis ad astra Sophi:
„Nobilis infami divam fuligine Censor
„Liberat, & vitio versa decora probat.
„Langrius, audaci subiens convexa volatu,
„Primus in illustri sidere castra facit,
„It foedae pertaesus humi quâ sanguine nullo
„Lurida perspicuis ripa lavatur aquis,
„Surgite, mortales aegri, de faece maligna
„Terrarum, quas in frusta furor secuit,
„Et fratrum temeratus amor dulcedine praedae,
„Et malè mentitum publica jura nefas.
„Integra res alibi est. socias in regna tiaras
„Langrius & gratis & sine lite vocat.
„Exuat invidiam proles insana Philippi;
„Hic & Alexander quo satietur habet.
„Nondum sic veteres avias pulmone revello?
„Qui loquor haec, ingens ipse dynasta loquor.

„Sed loquor immeritus. Quid agis, clarissime Langri,
„Quâ me fronte Deos inter & astra locas?
„Excidis intentis, ingentibus excidis ausis;
„Impare congressu corruit iste labor.
„Tota nitet virgo, totius Cynthia Caeli
„Instar habet; quot ibi castra tot Astra facis.
„Tolle quod hic unum sordet: Quod Regibus addis
„Hugenium, malè; quod sideribus, macula est.

[Maldeghem 19 Augusti 1645.]

De hoffelijkheid van VAN LANGREN, en de dank daarvoor van CONSTANTIJN HUYGENS bewijzen, dat zij elkander kenden en waardeerden. Waarschijnlijk hadden zij in Antwerpen kennis gemaakt, waar HUYGENS meermalen vertoefde en vele kennissen had, zoo als o. a. de familie DUARTE, die aan hem en aan de zijnen menigen dienst bewees.

Wat nog betreft de ingevoerde benamingen van de maanvlekken, VAN LANGREN had zich met recht te beklagen over JOHANNES HEVELIUS, die in zijne Selenographia 1647 [8]), en over GIOVANNI BATTISTA RICCIOLI, die in zijn Almagestum Novum 1651 [9]) dezelfde methode met zeer verschillende namen toepasten.

Stippen wij nog aan, dat VAN LANGREN in 1640 over een drievoudig kanon [10]) schreef, en volgen wij hem dan bij zijne, meestal vergeefsche, bemoeiingen omtrent het verbeteren der Belgische zeehavens.

3. Reeds in 1624 bemoeide hij zich met de haven te Mardijck, die hij met Duinkerken wilde verbinden door een kanaal, dat hij „Fossa Marianna Regia" doopte, en dat dienen moest, om bij afwisseling de havens te Mardijck en te Duinkerken van het ingespoelde zand te zuiveren, en op bekwame diepte te houden. Herhaalde malen kwam hij telkens op dit onderwerp terug; het verlies van Duinkerken maakte echter die plannen onmogelijk, en in 1653 beschreef hij alles, wat daaromtrent geschied was, in eene Memorie [11]).

Description particuliere du grand changement que le Sable ou banc de MARDYCK (*cest* PORTVS ICCIVS *selon Monr. Chiflet* [12])) *a fait depuis l'an* 1624 *jusques au temps present* 1653.

„*Michel Florentz van Langren* Cosmographe de sa Majesté a „tracé les quatre differentes figures du sable ou banc de *Mardyck*: „representées en cette Carte *), laquelle est divisèe en quatre petites,

*) Zie deze kaart achter dit stukje, Kaart N°. I.

„dont la premiere decouure le terroir & la marine, comprise entre „*Duynkerke*, *Linke* & *Grevelines*, montrant en petite forme comme „le sable estoit en l'an 1624. lors que le Port de *Mardyck* avoit deux „bancs, & deux canaux vers Orient. Le plus grand banc estoit „nommé *t' Schuerken*, lequel avoit 12 pieds de bosse par dessus la „superficie de la basse marée, l'autre estoit plus plate, ayant le nom „de *Schutebeeck*. Les grands navires logeoient entre *t'Schuerken* & la „plage, allans & revenans sans charge & sans canon par lesdits canaux „lesquels n'avoiēt que 4. pieds de fond a basse marée. Mais au „grand port de *Mardyck* il y avoit bien 6. 7. & 8. brasses de fond „a basse marée, & devant la Ville il n'avoit que 2. 3. & 4. brasses „chacun de 6. pieds, estans les bancs & la plage jusques aux Dunes, „deux fois par jour couuert de la haute mer.

„Les Nauires de guerre d'Hollande & Zelande se tenoient ordinai-„rement sous les bancs dit *Brebanck* & *Brake*, pour empescher les „entrées & sorties de ceulx de *Duynkerke*. Le Port interieur de la „Ville n'est gueres spacieux, estant a demy rempli de boüe, ayant „aussy fort peu de Caye pour loger les Navires du Roy, des Mar-„chands, & des estrangers, n'ayant que l'eau du Canal de Bergues, „quelque peu de la Moere, avec ce qu'on enserre par l'ecluse bleuë, „pour nettoyer & entretenir ledit haure.

„La deuxieme Carte demontre la figure du sable comme il estoit „en l'an 1625, auquel on voit qu'un desdits passages estoit serré, en „l'autre flottoient trois tonneaux servants de guide aux grandes Navi-„res. La baterie de bois dite de N. Dame de Montagu estoit ache-„vée, mais e Fort Royal qu'on a depuis faict sur les dunes, n'estoit „encores commencé.

„La troisieme Carte represente la figure de la marine comme elle „estoit en l'an 1639. on ne trouuoit que 2. 3. & 4. pieds de fond „devant la Ville, ou il y avoit autant de brasses en l'an 1624. & 25. „ce qui est vn notable changement en si peu d'annees, la basse Ville „de *Mardyck* estoit achevée, comme on la voit en la quatriesme „Carte, laquelle decouure le miserable estat dudit sable en l'an „1645. lors que les François prindrent *Mardyck*, ayant l'agrandissement „de la Ville esté faict en l'an 1640. La fascinade ou passage des Navires „située sur le banc estoit brisée & cachée dessoub le sable, & n'avoit „le port exterieur de la Ville pas vn demi pied d'eau a basse marée.

„*Van Langren* ayant preueu & predit ce grand changement passé „28. ans, a cause qu'il recognut que le sable glissoit et voloit avec „plus de force vers l'Orient qu'au contraire, il representoit qu'en peu „d'années le haure de la Ville & celuy de *Mardyck* viendroient a „neant, ne fut qu'on voulut mettre en ractique certain artifice par

„luy inventé: pour arrester ou pour faire aller le sable desdits bancs, „disant qu'il seroit bon de faire vn Canal de 150. ou de 200. pieds „de large, depuis le bout du haure de *Duynkerke* jusques vn peu par „dela le Fort de *Mardyck*, comme on voit figurativement en la troi- „sieme Carte par les lettres A. B. C. D. Ce Canal auroit deux es- „cluses, l'vne en B. & l'autre en D. afin de pouuoir journellement „enserrer quantité d'eau de la mer entre icelles, tant pour escurer „le haure de *Mardyck*, comme celuy de la Ville, lequel deviendroit „par ce moyen plus spacieux & plus profond.

„Si cela avoit esté faict, on auroit eü place assés pour loger 2000. „Navires: *Mardyck* auroit esté annexé a la Ville de *Duynkerke*, „au long des deux Diques auroit on peu bastir beaucoup de mai- „sons pour Marchans, Maronneirs, & Pescheurs, & auroient les „Navires esté cōduitz par ledit canal jusques a la Caye de la „Ville, & mesme demeuré flottans en l'eau, sans se creuer sur le „fond par leur pesanteur. Au moyen de ces deux escluses auroit „le Roy esté maistre dudit quartier, lequel on auroit en temps de „necessité peu inonder & tenir soub l'eau, veü que le terroir est assè „bas & de peu de valeur, les François auroient par ainsi eü de la „peine pour passer ledit canal, & se fourrer aux dunes, pour assieger „& prendre *Mardyck*, & la Ville, lesquelles ilz ont trouuè tout des- „couuert, comme on voit en la quatrieme Carte. Si ledit Canal avoit „esté faict, il n'auroit par esté besoing d'entreprendre en l'an 1637. „avec tant de frais le haure de *Greueline*, lequel ouurage a esté „delaissé en celluy de 1638. apres que le Feu Prince CARDINAL IN- „FANTE [13]), le Prince TOMAS DE SAUOYE [14]), & tous les Conseils, „avoient consideré les raisons de *van Langren*. Si cela avoit esté „faict en temps, on auroit peu recevoir en icelle la grande Flotte „Navale de Sa Majesté, laquelle fut conduite par *Don Antonio de* „*Oquendo*, & fut totalement ruinee sous *Duyns* en l'esté de 1639. „apres que *van Langren* avoit dit a vn grand Ministre que ce „seroit bien de faire venir les navires du Roy sous *Breebanck &* „*Brake*, place ou se tenoient ordinairement les Navires d'Hollande.

„*Van Langren* ne se lassant nullement de poursuivre le service „du Roy, a renouuellé ces choses es années de 1637. 39. 42. 44. 45. „& finalement en l'an 1646. lors que Son Excellence le Comte de „FUENSALDANA avoit si heureusement reprins le Fort de *Mardyck*, „lequel s'estant retiré en Espagne, procuıà aux instāces de *van* „*Langren* que Sa Majesté escrivit par advis du Conseil d'Estat de „la Monarchie au Gouuerneur du Pays qu'on auroit de faire le „susdit canal de *Mardyck*; ce qu'ayant esté negligè les François „prindrent le Fort de *Mardyck* la seconde fois, & peu de jours apres

„la ville de *Duynkerke* en l'esté de l'an 1646. Le Toutpuissant „ayant benit les Armées de Sa Majesté sous l'heureuse conduite de „S. A. le Serme Archiduc LEOPOLDE GVILLAVME [15]) par les repri„ses de *Greueline*, *Mardyck*, *&* *Duynkerke*, aydé des bons Conseils „de sadite Exell. & qu'il est notoire que cest Estat ne sçauroit „fleurir sans ports de mer, d'autant que ceux d'*Ostende*, *Nieuport* & „de *Greuelines*, ont autant besoing d'estre meliorez que celluy de „*Duynkerke*, lequel comme on scait, est tellement bouché par le grand „Sable, qu'a peine il y peult entrer ou sortir vn Nauire sans charge, „& se ruinerà de plus en plus, impossible pour le remedier: desorte „que cette tant renomme ville maritime sera bien tost vne ville „terrestre, esloignee de la mer, ce que durera pour le moins 200. „ans avant que le grand banc de sable aura passé le port; comme „*van Langren* a dit allieurs, ne fut qu'on voulut en preuencion „faire le Canal susdit pour conduire les Navires de mer jusques a „la Caye de la Ville, lesquelles s'arrestent presentement toutes au „Port de *Mardyck* d'ou il fault mener la marchandise par terre ou „par des Bylandres en la Ville, non sans grans frais des marchans. „Et comme cette Proposition en tout temps a esté estimee de plu„sieurs Seigneurs de jugement, il luy a semblé estre de son devoir „de le releuer, & presenter a S. A. Serme ne doubtant que ceulx qui „font estat de la Nauigation, & bien de la Patrie, y tiendront la „main, avant qu'il y survient quelque nouveau changement.

„Toute la Flandre deviendra par moyen de ce nouveau Port de „mer tres-florisante, & sera la Ville de *Duynkerke* avec le temps „non moins renommè que celuy d'*Amsterdam;* le canal FERNANDINA „sera par ledit moyen restaurée, en grand benefice de ceux de *Bruges*, „les despences de cest ouvrage ne seront si excessives comme quel„ques vns l'ont prefiguré, & pourra mesmes estre faict en vn année „seul, sans les deniers du Roy.

„Les Escluses seront quelque peu differents de celles qu'on a „practique jusques a present, & ne donneront aucun empeschement „aux Navires entrans & sortans comme les autres. Et pouront ceux „de *Berges S. Winox* se servir de la mesme commodité, moyennant „qu'on faireit vn double escluse environ de D. comme on voit en „la troisiesme Carte.

„Si neantmoins quelqu'un veut produire vn melieur concept pour „beneficier la Ville de *Duynkercke*, la *Flandre*, & tout l'estat il sera „toujours aise d'y condescendre, moyenant que l'un & l'autre soit „attentivement considerè par des gens du mestié. C'est ce qu'il supplie „avec humilité a Sa Majestè, a Son Altese Serenissime, & aux Con„seils de le vouloir faire ainsy si on a desir de faire le susdit Canal."

4. Van de vier Belgische zeehavens, Ostende, Nieupoort, Grevelingen en Duinkerken, bleef gedurende deze tijden van oorlog alleen Ostende in het rustig bezit van het rijk, en daarom kwam VAN LANGREN telkens terug op zijne plannen voor die zeehaven, onder andere in eene brochure, uitgegeven in 1650 [16]); maar ook hier had hij met veel tegenwerking te kampen. De Belgische ingenieurs van dien tijd schenen niet gediend van den meer wetenschappelijk gevormden man, en bleven — hoezeer zij in hunne pogingen faalden, zooals ook VAN LANGREN voorspeld had, — juist daardoor misschien te feller tegenstanders van diens voorstellen. Een omstandig verhaal daaromtrent vindt men in zijne memorie aan den koning, waarbij men een kijkje krijgt in de toenmalige ingenieurs-wereld in België.

AV ROY.

„REmonstre tres-humblement *Michel Florençio van Langren* Cos„mographe & Mathematicien de Sa Majesté, qu'il a dez son bas eage „passé 35. ans considerée la disposition des affaires publiques, & „principalement celles qui regarde la Marine, Commerce, & Navi„gation de la Mer, s'imaginant & sans aucune doubte, si on ny „prennoit esgard en grande haste que les ennemis de la Religion „Catholique, ne deviendroint non seullement maistres absolus des „Mers de pardeçà, mais aussi avec le temps en celle des Indes, „à la totale ruine de la Monarchie Catholique, ce qu'ayant pre„veu dez l'an 1625. il representoit à la Ser^{me} Infante Madame „ISABEL [17]) de glorieuse memoire, la maniere pour tirer un Canal de „Duynkerke vers Mardyck *), à cause qu'il recognut que le Port de „la ville estoit trop petit & incommode, pour pouvoir loger nombre „de Navires. Et ayant *van Langren* par ordre verbal de ladite „Princesse fait une visite & description des costes, & des quatre „Ports de Mer de la Flandre, il representoit aussi en l'an 1627. „l'unique moyen pour mettre en bon estat le havre d'Ostende, & „de faire secher les terres, que à cause de la guerre avoint estez „inondées. Mais cela ne fut fait audit temps, à raison d'une im„pression erronée que quelques Ingenieurs & inhabitans de la „Ville avançoint.

„Et l'ayant renouvellé en l'an 1638. (par induction du Prince „THOMAS, avec ce qu'il avoit consideré pour le havre de Nieuport)

---

*) Zie de Aanteekening N°. 11.

„peu de temps apres qu'il avoit demonstré l'invalidité du nouveau „havre de Grevelingues, que le Marquis de FUENTES[18]) General „de la Mer, avoit commencé, sur l'advis du Commis *Kesseler* (pour „lors) Superentendent de la fortification de Flandre, & des Inge„nieurs *Coeck* [19]) & *de Bucq*. D'où tant de malheur a esté occa„sionné au pays. Et comme la susdite proposition d'Ostende „fut communiqué audit Ingenieur *Coeck*, il s'opposoit à icelle, par „un advis pueril, & nullement fondé en raison, ou science, comme „il peut verifier.

Van Langren ayant en l'an 1642. recognu que DON FRANCISCO „DE MELLO [20]) faisoit grand estat de la Mer, il luy donnoit ad„vertence de sondit concept d'Ostende, sur lequel il respondit amia„blement par escrit, ordonnant à *van Langren* de le suivre lors „qu'il alloit pardelà en Avril 1643. & ayant fait comprendre à sa„dite Ex^ce^ & au Prince de LIXAIN, par demonstration Physique: au „moyen d'un jeu de Carte, qu'il y avoit de l'eau en la Mer, lequel ne „se meut ou se bouge, par le flux ou reflux (sur quoy il fondoit sondit „desseing) Il se resolvà de le faire en la mesme forme & maniere, „comme il est designé en la Carte n°. 1 *), & auroit aussi esté executé, „s'il n'avoit reçeu la disgrace à Rocroy peu de jours apres.

„Au mois de Fevrier 1650. s'efforçoit le Gouverneur & le Magistrat „d'Ostende, par induction de l'Ingenieur *Henrick Jansen* de porter „le Ser^me^ Archiduc LEOPOLDE GVILLAVME, pour pouvoir coupper „quelques dicques du costé de Santvorde & Stene, croyant par ce „moyen d'approfondir le havre, ce qu'ayant esté advisé à *van Lan*„*gren*, il se trouvoit en homme d'honneur, & de conscience obligée, „d'advertir S. A. S. & au Conseil, ce qu'il avoit es années 1627. „1638. & 1643. representé & demonstrée, afin d'empescher que ce „sage Prince, ne causeroit (sans necessité ou bon effect du havre) „quelque dommage & tristesse au peuple. Il fit en cette conside„ration & avec haste, graver & imprimer la susdite Carte n°. 1 *), „avec l'inscription; & l'ayant expliqué a S. A. il disoit d'estre bien „aise de l'avoir veu, asseurant par des paroles tres-benignes, qu'il „avoit horreur de causer aucune tristesse ou dommage au peuple, „disant qu'on estoit sur le point de prendre resolution; promettant „a *van Langren* de considerer, & recognoistre à son temps ses bon„nes services.

„S. A. S. ayant par advis de ceux de Finances, ordonné a *Pierre* „*de Roberti* Commis & Superintendent de la fortification du Païs,

---

*) Zie dit kaartje hierachter. Kaart N°. II.

„de bien considerer la susdite proposition de *van Langren*, il se „transportoit en Juin 1650. vers Ostende avec les Ingenieurs *Coeck*, „*Jansen*, & l'Architect *Merckx*, sans en aucune maniere donner „advertence, ou advis a *van Langren*, lequel s'il y eust esté appellé „(selon qu'il luy sembloit convenir) il auroit peu expliquer son „invention visiblement sur le lieu.

„Ledit Cōmis & les Ingenieurs ayant en Juillet avisé a S. A. „(lors qu'il estoit en France) que la susdite proposition de *Van Langren* ne vailloit rien, asseuroient qu'il ny avoit autre ny melieure „invention pour profondir le havre, que de faire une grande & forte „Palisade, Dicque ou Estaccade, depuis la Cataye Orientale note I. „jusques à la verde dicque note K. en la susdite Carte, aleguant „(selon qu'on a relatè a *van Langren*) que cela ne cousteroit que „TROIS CENT MILLE FLORINS, a quoy S. A. ne voulut incliner.

„De tout quoy ayant *van Langren* esté adverti, il presentoit le „19. d'Aoust 1650. une requeste*) au Conseil, disant que cette „grande dicque ne seroit non seullement dommageable pour le Royal „tresor, mais en particulier pour la Ville, comme estant un concept „directement contre les regles de fortifier; asseurant que le havre „ne seroit par ce moyen en aucune maniere melioree, aleguant „qu'il seroit beaucoup mieux (si en cas on ne voulut faire le dicage „& ecluses qu'il avoit represētée) de faire au long du havre un petit „ouvrage de bois, lequel ne cousteroit que cinquante mille florins „en 6. ou 7. ans, au lieu de 300. mille, & lequel pourroit estre fait „& achevée en un mois, verifiant par sa signature, d'estre oontent „que audit ouvrage seroit frayé & compté, les douse mille florins, „que le Roy le devoit en ce temps de son gage, & que icelles seroint „perdus pour luy, si par apres on recognut par experience, que son „dit dessaing & ouvrage ne vailloit rien, à condition (comme de rai„son) s'il fut trouvé bon & loüable, qu'il en seroit satisfait, pour „avoir sauvé l'estat d'une si excessive despence, que ledit Commis „*Roberti* vouloit consumer avec ses Ingenieurs, en un temps lors „que l'argent estoit si cher, requerrant le Conseil avec humilité, „(afin de ne frayer un soul mal à propos) de le faire ouyr verbale„ment, par eux mesmes, ou par des personnes & Ingenieurs, con„jointement ou separement, afin de pouvoir naivement expliquer ses „pensees par viue demonstration, comme estant un affaire dependant „de sa profession Mathematique. Sur cela fut ordonné par lettres „expres, dathe 20. Aoust, *que van Langren s'auroit de transporter*

*) Vergelijk de aanteekening N°. 16.

„*à Bruge avec le Conseillier Malineus, pour y entendre ce que ledit „Conseillier & Commis Roberti le communiqueroint, à l'esgard du „havre d'Ostende, afin d'y resoudre en cest endroit.* Et cependant „consultoit le Conseil à S. A. S. en faveur de *van Langren*, lequel „ordonnoit qu'on ne fairoit rien sans l'avoir oüy. Mais comme *Roberti* „(selon que le Conseillier *Malineus* à relaté) ne vouloit venir en „conference avec *van Langren*, parlant en sadite lettre en son „dishonneur, cela occasionnà que *van Langren* presentoit une se„conde requeste, le 14. de Septembre 1650. par laquelle il offroit „genuement de faire trois demonstraçions publicques sans les frais „du Roy, la premiere devant le Conseil de Finances, la deuxiéme „devant ceux du Francq & de Bruge, & la derniere devant le Gou„verneur & Magistrat d'Ostende, s'obligeant de se sousmettre a leurs „opinions, ou de ceux que S. A. ou le Conseil seroient servis de „deputer, & afin d'illustrer la dispute, & deveiller les bons esprits, „il asseuroit par sa signature qu'il donneroit un present *) de SIS „CENT FLORINS †), a l'Ingenieur, ou a la personne qui sçauroit donner „une melieure invention que la sienne.

„Tous quelles choses ayant aussi esté veu par le Conseil, ils depe„schoient le mesme jour leur seconde lettre, ordonnans a *van Lan„gren*, de se transporter vers Ostende, pour conferer avec l'Ingenieur „*Hendrik Jansen.* Et *van Langren* pour tant mieux donner à en„tendre ses pensées, faisoit avec haste imprimer un petit livre en „Flamand §), du havre d'Ostende, lequel il fit Censurer par quatre „personnes, faisans professions des seinces [sic], contre quel escrit „ledit Cōmis, ny aucun des Ingenieurs susdis, se sont osè opposer „par aucun escrit public, comme ça en tout temps, & par tout le „monde estè la coustume, de ceux qui veullent en aucune maniere „se faire cognoistre pour des hommes d'esprit; encores que les ma„tieres dont estoit question, ne importoit par fois pas un soul.

„Mais au contraire ledit Commis avec quelques une lesquels ne „sçavent ce que c'est des sciences; & qui ne sçavoient comprendre „les speculations Physiques du mouvement de la mer, se mocquoient „de *van Langren*, & de ses escrits, aimans mieux de passer outre avec „leur Constable dicque que d'intenter en vain aux 600. florins susdits.

„Le Ser^{me} Archiduc estant retourné de la campagne de France, „envoya en Octobre 1650. le Prince DE LIXAIN vers Ostende, afin

---

*) Van dit aanbod maakte de Notaris VAN HEEDE te Ostende eene acte op, den 18 Juli 1651.

†) Deze som werd in 1660 tot 3000 escus verhoogd.

§) Het boekje van aanteekening N°. 16.

de considerer en quelle maniere il conviendroit de le faire, mais „comme le dit Seigneur, fut surprins par la mort à cause de l'hu- „midité de l'air, n'a sçeu declarer a S. A. que ladite proposition „de *van Langren* estoit la melieure, comme il avoit dit & asseuré „au Seig^r de Hellebus Gouverneur de Oudenarde & à quelques „autres personnes de qualité, lors qu'il retournoit par Gand.

„S. A. ayant le 15. de Decemb. 1650. à la requisition de *van* „*Langren* ordonnè au Conseil, qu'on luy envoyeroit ce qu'on devroit „faire, le Commis *Roberti* l'envoyà le 17. derechef sondit dessaing „de la grande dicque, a laquelle S. A. se conformà, à cause qu'il „croyoit qu'on avoit tenu la conference, laquelle il avoit ordonné „passé plusieurs mois.

„Mais comme le Commis depeschoit en suitte de la susdite reso- „lution, ses Ingenieurs ça & la, envoyant *Jansen* au Pays de Luxem- „bourg, pour faire coupper des arbres, *van Langren* informà cepen- „dant tous les grands Seigneurs de la Court, mettant en considera- „tion l'importance de la Ville d'Ostende, & combien de sang, & „d'argent elle avoit cousté à l'Archiduc ALBERT. Il envoyoit aussi „a S. A. au Conseil, & par tout, ses deux petites Cartes n°. 2. & „n°. 3. *) ou les deux dessaings à sçavoir celuy de ses contredisans, „& le sien sont separement representez. Tout quoy ayant esté veu, „& que le Sr^me Archiduc & le Conseil avoient considerèe les petits „Versets †) que *van Langren* avoit fait graver sur icelles §), cela „changeà en un instant, ce qu'on avoit resolu, car le Conseil dressoit „une Consulte à S. A. a l'inceu dudit Commis.

„*Roberti* alterée de ce subit changement, temporisoit l'affaire, & „ne parla pas une parole d'Ostende, le reste de l'annee 1651. par „ou apert qu'il ayma mieux la ruine du havre, que de vouloir „condescendre a une melieure & moins coustable proposition que la „siēne, *van Langren* l'exhorta cependant par escrit, de ne vouloir „ensevelir cette derniere resolution de S. A. mais en vain, car le Com- „mis asseuroit à ses amis, de ne jamais plus se meller de la fortification.

Van Langren ayant en ces entrefaits: par induction de quelques „grands Personnages de la Flandre, esté convié pour se trouver à „Bruge, à la Consecration des Illustrissimes Evesques de Bruge [21]), „& de Rurmonde [22]), il se transportoit à la requisition de Messeig- „neurs de Gand [23]), d'Anvers [24]), d'Ephese & de Rurmonde [25]), avec „eux vers Ostende, le jour de S. Anna **) 1651. ou ils desiroient de

*) Zie de kaartjes N°. III en IV hierachter.

†) Zie het stuk aan het eind van § 6.

§) In het pamflet aangehaald in aanteekening N°. 34.

**) St. Anna is 26 Juli.

„voire la mer & le havre, *van Langren* se servant de cette notable „occasion, presentoit par leur Sacre mains, une requeste Notorial, au „Gouverneur & Magistrat, par laquelle il renouvelloit pour la troi- „siéme fois de comparoistre en public, & de se soubmettre, & de „donner les 600. florins comme si devant a esté dit, mais tout en „vain, car il n'a jamais peu attirer ces contredisans, en une si nota- „ble & honorable compagnie, ou ils pourroient acquerir argent & „honneur, par ou il apert comme en un miroir qu'en leur cœur „estoit escrit, QUE VAN LANGREN AVOIT RAISON.

„Cependant ledit Commis aide d'un Ministre de plus grande „authorité, s'efforcoient (alors comme encores pour le present) d'em- „pescher le bon payement des gages que *van Langren* a gaigné, & „merité depuis l'an 1626. mais parloient & parlent encores par tout „en son dishonneur, comme s'il ne meritoit chose quelconque, sans „prendre esgard aux estimables lettres, que Sa Majesté a escrit „sur les choses de son entremise & de tresgrande importance, ny a „plusieurs notables Consultes, que le Conseil a par cy devant dressé sur „quelques uns d'icelles, ny aussi sur les trois points de considera- „tion: que *van Langren* a noté en son escrit de FOSSA MARIANNA *), „ny sur la remonstrance qu'il a paraphé le 9. d'Aoust 1657. „par laquelle *van Langren* demonstre que Sa Majesté a en l'an „1647. esté comme contraint, d'accorder tout les demandes des „François, & Hollandois, pour avoire la Paix, à cause que ses ad- „versaires avoient empesché, ce qu'il avoit de temps à autre repre- „sentée pour le bien de cest estat. Ne faisant veritablement aussi nul „estat des cincq decrets que le Ser^{me} Prince DON JUAN D'AUSTRICE [26]) „a envoyé au Conseil, a raison que le Ser^{me} Prince DE CONDÉ [27]) „l'avoit asseuré qu'il n'auroit sçeu assiger Courtray en l'an 1646. „si on avoit suivi l'advis de *van Langren*, sur lequel decret ledit „Ministre a mis de sa main qu'il en estoit satisfait, sans l'avoir „donné chose quelconque. Ayant le dernier tesmoingne une joye „indicible de la troisiéme perte de Mardijck, lors qu'il disoit a *van* „*Langren* que cela alloit bien, (WANT DE PAPEN SULLEN NU VEEL „GELDT MOETEN GEVEN) car les Ecclesiastiques seront contraint (disoit „il) de donner beaucoup d'argent &c. Tout quoy avec ce que dessus, „& derriere, a obligé a *van Langren* de presenter cette requeste „Apologique a Sa Majesté, desirant par icelle aussi d'empescher que „les estrangers ne jetteroient par inadvertence la coulpe des pre- „sentes malheurs du Païs, sur quelques Illustres Personnages, ou

*) Zie het werkje van Aanteekening N°. 11.

„sur les Espagnols, puis qu'icelle competè a six ou sept Flamans „de moindre qualité, lesquelles sont tous cognus a *van Langren.*

„Estant le Commis *Roberti*, vivement pressé par ceux d'Ostende, „pour faire redresser & meliorer leur havre, soit par l'un ou par „l'autre moyen, à cause que dicelle depend tout leur bonheur. Il „ne trouvoit autre expedient que de faire signer plusieurs jeunes „Ingenieurs ce que luy sembloit propre a son dessaing, & les fit „aller avec le Bourgemaistre *van Borm*, & avec le Pensionnaire „*Tristram*, & quelques Bourgeois d'Ostende vers S. A. S. & de „Ministre, à Ministre, ou ils exclamoient tous d'un voix contre „*van Langren*, lequel comme c'est notoir ne demandoit autre chose „que d'aschever le different par demonstration Mathematique & „Physique, en deux ou trois heures de temps, afin que eulx & luy, „seroient satisfaits & desabusées, semblant a *van Langren* qu'il „vailloit mieux de disputer un peu, pour exercer l'entendement que „de frayer mal à propos une si notable somme du Royal tresor, & „de mettre en danger une Ville: laquelle avoit cousté tant a l'Ar„chiduc ALBERT [28]) pour la prendre.

„Tous ces lamentacions ouies, & ce que les Ingenieurs de *Roberti*, „les Bourgeois & Matelots d'Ostende asseuroient par des raisons „plausibles en aparence, à sçavoir que leau sortant & entrant au „havre seroit pressé par cette grande dicque, & que par consequent „le Havre s'aprofondiroit, outre ce que le Marquis DE LEDE [29]) „avoit dit & escrit au Ser^me^ Archiduc par une maniere extraordi„naire: S. A. voyant tout ce que dessus, si conformà voyant aussi „ce que ledit Commis avoit fait signer par quelques uns dudit „Conseil, contre le desir & volonté du Marquis DES EAUX lequel „s'opposoit a icelle, comme il a relaté a *van Langren.* Voulant „qu'il seroit personellement ouy comme S. A. avoit par cy devant „ordonné. Mais comme le Commis, ny les Ingenieurs, n'avoient pas „bien consçeu & examiné, la demonstration Phisique du croissant, & „decroissant de la mer, expliqué figurativement au dernier verset *) „du petit livre d'Ostende †), si est'il, que tout leur devoir n'a servi „de rien, comme on entendra au fin de cest escrit.

„Estant à noter, que les sciences demonstratives comme sont les „Mathematiques, ne sont nullement subjects au pluralité des voix, „comme des autres matieres de la Jurisprudence, d'autant qu'icelle „ne depend pas des fantaisies humaines, mais simplement de la rai-

---

*) Zie het stuk op blz. 27.

†) Zie het pamflet aangehaald in Aanteekening N°. 34.

„son demonstrative, laquelle ne sçauroit faillir, comme sçavent tout „ceux qui se sont exercées aux sciences, & particulierement les „Ser[mes] Princes DON JUAN D'AUSTRICE, & DE CONDÉ pour si avoir „grandement exercées.

„Et s'estant *van Langren* lassé de tout ces ruses, il se resoluà de „ne plus parler un seul mot des affaires d'Ostende, mais voyant que „quelques uns par induction du Commis *Roberti* estoint resolu de „frayer une si notable somme de deniers, il adjoustoit en Mars „1652. (par forme d'advis) la Rouge dicque a sa troisiesme Carte, *) „avec un petit versel †) explicatif (lequel il a icy mis derriere les „Censures des Mathematiciens) mettant en consideration ce que seroit „mellieur de faire, la Rouge ou la Jaulne dicque, & lequel des deux „devroit esté fait le premier. Ce qu'ayant aussi envoyé a S. A. a „cachet vollant, & sans requeste au Conseils, & a quelques Princes, „& Seigneurs, cela causâ le troisiéme, & un treslong arret, des af- „faires de *Roberti*, car quelques Princes, & Seigneurs du Conseil, „animoient a *van Langren* de ne point desister de l'affaire, car le „dessein plaisoit a tous ceux, qui le voyoient.

„Et ayant *Roberti* & *van Langren*, estes remis d'une longue & „dangereuse maladie: & considerant la perte de son temps, à cause „que ses contredisans ne voulloient comprendre ou apprendre un „affaire si grossiere; & laquelle ils ne sçavoint destruer par raisons „demonstratives, il escrivit le 9. d'Aoust 1653. au Commis *Roberti*, „qu'il delaisseroit tout l'affaire d'Ostende, nonobstant qu'il auoit „assé de matiere pour empescher son dessein, l'asseurant que le temps „le fairoit sage, sur quoy il print vigeur, & parloit en aparence pour „*van Langren*. Et enchergeà le 17. d'Aoust 1654. à l'Architect „*Merckx*, la direction de la Jaulne dicque, (lors que son Ex[ce] le „Comte DE ISEMBOURG [30]) Premier Chef du Conseil des Finances „estoit en Allemagne) & fut le susdit ouvrage de la grande dicque „fait & achevée en l'an 1655. par *Cornelis Pitersen*, lequel usoit „tant de vaines paroles contre les Mathematiciens.

„*Van Langren* extrememēt zelé pour le service du Roy, voiant „que son amis *Roberti* s'alloit perdre, le pria amiablement de pren- „dre esgard a son honneur, & a l'argent du Roy, le fit mesmes pre- „senter par le Commis *Maes* un nouveau expedient pour en quelque „maniere meliorer le havre, a moins de six mille florins, & lequel „estoit tout different, de ce qu'il avoit par cy devant representée,

---

*) Zie dit kaartje hierachter, No. IV.

†) Zie het stuk op blz. 27.

„croyant par cette stratageme d'amitié de sauver la reputacion du „Commis & l'argent de sa Majesté, mais tout en vain, car cette tres „humble & affectionné advertence fut par le Commis *Roberti* rejet-„té, car il passoit outre avec la levé de la grandiose y peligrose „dicque de *R. Roberti*, *C. Coeck*, *I. Janse*, *M. Mercks*, lequel apres „avoir cousté une somme de HUICTANTE MILLE FLORINS argent con-„tant; & lequel a pour le present esté fait plus que quatre ans, & „contre lequel le flux & le reflux de la mer a pressé, passé & repassé „presque six mille fois, on voit le present jour de Saint Jean*) 1659. „que le havre n'est nullement parfondi ou meliorée, mais au con-„traire empirée & rempli de sable, ensuitte de ce que *van Langren* „leur avoit prescrit par ses requestes & par folio 6. de son petit livre „d'Ostende. †).

„Et comme ils attribueront infaliblement ledit deffaut: a ce que „la Jaulne dicque n'a pas esté aschevée par manquement d'argent „que jusques au Ponton, ils presseront derechef la Court pour la par-„faire jusques à la Verde dicque note K. ce que cousterà beaucoup „plus que ce qu'ils ont frayé. Cela oblige a *van Langren* en con-„science de representer derechef a Sa Majesté comme bon Vasal, & a „son Ex^ce^ le Gouverneur que le tout ne vaillera rien (comme il a „par si devant asseuré de Dunkercke, si on l'avoit voullu croire) „soit qu'ils font leur dit ouvrage plus haut, ou plus bas que la „superficié aquatique de la haute mer. Asseurant *van Langren* en „outre que le havre se ruinera entierement en peu d'années si on „laisse ladite dicque de R. C. I. M. §) en estre, doubtant aussi, si „maintenant on pourrat parfondir le havre avec tant de facilité: par „moyen des Escluses imaginaires de *van Langren*, comme on auroit „peu faire passé tant d'années, & ce à cause que le fond terrenal „du havre, cêt presentement beaucoup chargé & rehaussé, par la „dure crouste de sable, qu'elle n'estoit en ce temps la, mais s'ils la „veullent paraschever jusques à la Verde dicque K. *van Langren* „prie Sa Majesté de les faire donner premierement leur raisons de-„monstratives, afin que les moyens du Roy, ne seroient pour la „deuxiéme fois consumées si mal a propos & sans effect, a la honte „de semblables Ingenieurs.

Ils ont depuis leur dit ouvrage, aussi couppé quelques dicques „du cousté de Santvorde, croyant de parfondir le havre, mais tout

---

*) Dat is de 24ste Juni.

†) Zie het werkje van Aanteekening N⁰. 16.

§) Dit zijn de voorletters van de vier voornoemde ingenieurs.

„en vain, à grands frais du Roy, & dommage des proprietaires ; ceux „d'Ostende & leur Ingenieurs se plaingnent que ceux de Bruge ont „faict le Canal FERNANDINA*), sans lequel si on leur donnoit la „permissiō, ils metteroint soubs la Mer une bonne partie de la Flan„dre pour meliorer leur havre, certes cela n'a point l'odeur d'Ingenie, „mais d'une rudesse: practiqué en nul endroit d'Affrique.

„On vient aussi de dire a *van Langren* que ceux d'Ostende sont „en grande paine pour trouver de l'argent pour refaire le coffres „maritimes, craignans & avec raison, que la Ville ne soit un jour „engloutti par les furieuses ondes de la mer; & au contraire il y a „aussi du danger, quelle ne seroit en partie ensevelie par le sable, „que les vents Occidentaux poussent en temps de basse mer, du „costé de Porcq-espine, selon que le Serme Prince DE CONDÉ, a „depuis peu asseuré & dit a *van Langren*, quel Prince comme gran„dement zelé pour le bien de cest estat: cognoissant aussi la Ville „d'Ostende, a conseillé à *van Langren* de declarer ce qu'il a exco„gitè estre bon, pour remedier tous ces inconveniens susdits, sur quoy „il a respondu a S. A. d'estre prest, moyennant qu'il plairoit pre„mierement au Roy, & a son Exce le Gouverneur, d'ordonner au Com„mis *Roberti* & a ses Ingenieurs susnommées de confesser leur mes„prise, ou bien de la maintenir en un assemblé public, de tant de „sçavans & judicieux Princes & Seigneurs, dont cette Court est en„richi, & de les faire donner raison pourquoy ils ont mieux aimé de „gaster l'unique havre de sa Majesté a ses propres depens, que de „vouloir venir en amiable conference avec un homme qui mange le „pain du Roy, comme *van Langren* a tant de fois supplié avec „sincere humilité, lequel a veritablemēt esté contraint à une patience „insupportable a une personne de sa qualité & profession, de se „voire en cette maniere meprisé, & chiflée, de ceux qui ne sçavent „(comme apert) ce que cest des sciences, ce que cest du mouve„ment de la Mer, ou ce que cest de la Lune: contre laquelle ils ont „tant abbayé, sans comprendre ou conside[rer] §) à quoy cela sert, ou „ce que le Roy a enchargée à *van Langren* par ces Patentes, & ce „que deux Papes, plusieurs Cardinaux, Princes, Seigneurs, & sçavans „Personnages, & Professeurs de la Mathematique de divers endroits „de l'Europe, luy ont escrit, sur cette speculation Celeste †), de „tout quoy il faira en bref parade, pour montrer que les habitans „de cette nostre terre, sont bien 30. fois plus variables: & par con-

*) Zie het kaartje N°. I bij het pamflet van Aanteekening N°. 11.

§) De laatste syllabe ontbreekt.

†) Zie het boekje van de Aanteekening N° 5.

„sequēt plus sottes, que celles de la Lune, s'il y a des habitans „par de la comme par deça. Au moins on voit bien que *van Langren* „ne varie point, puis qu'il a demeuré 34. ans ferme & invariable „sur son concept de Mardyck, & 32. ans sur celuy d'Ostende, ayant „entretant recognu que les Lunatiques de ceste nostre terre (lesquelles „sont fort brusques, vehemens, & opiniatres) ont ruiné le Roy & „l'Estat, avec un infinité de demi Lunes qu'ils ont fait cy bas, à „cause qu'ils n'ont en tant d'anneés voulu comprendre, ou sceu re- „futer par demonstration, ce que *van Langren* leur a si nettement „prefiguré.

„Retournant à Ostende, il apert sans contredit, que tous ses de- „voirs n'ont eü autre fin, que pour empescher qu'on ne fairoit point „le pesché d'inonder les terres des gens de bien, & que le Ser^me^ „Archiduc LEOPOLDE ne seroit desçeu de ses insçavans acteurs, „lesquels n'ont aucun sentiment de la ruine de leurs proschains & „compatriots.

„Et si par advanture ils fissent les sourds, les muets, ou les tar- „difs pour respondre, ou qu'ils aleguoient que le Marquis DE LEDE „General de la Mer, ne faisoit en son vivant*) non plus d'estime „de la susdite proposition d'Ostende, comme il n'avoit fait du Canal „imaginaire de FOSSA MARIANNA †), que *van Langren* a ainsi inti- „tulé a l'honneur de la Reyne [31]), sur cela ne reste avec chose à „dire, que tout cela est tres-vray, & que ledit Marquis a en imita- „çion du Commis *Roberti*, desestimée avec risée l'un & l'autre, tant „a la personne du Marquis DE CASTELRODRIGO §), comme du Ser^me^ „Archiduc LEOPOLDE, & a S. A. le Ser^me^ Prince DON JUAN D'AUS- „TRICE, mais helas les deplorables effects des années 1645. 1646. „1657. & son deplorable trespas avec la perte de Duynkercke, en „l'an 1658. ont manifesté ce qu'ils ont occasionné, de tout quoy „*van Langren* se rapporte avec modestié, a ce qu'on a dit de luy „& de eux par tout le Païs, tant es assemblées de plusieurs Estats, „Conseils, & Magistrats, comme a ce que un grand nombre d'Illus- „tres Princes, Seigneurs, & sçavans Personnages luy ont fait l'hon- „neur de l'escrire: asseurans que la derniere perte de Mardyck „(lequel a servi de pierre d'aschoppemēt de ce sage Prince: lequel „ne l'avoit jamais veü) a aussi occasionné celle de Duynkerke, à „cause des susdits. Ayant la perte [de] Mardyck en telle maniere

*) Hij stierf den 23 Juni 1658 bij de verdediging van Duinkerken.

†) Zie het werkje van Aanteekening No. 11.

§) Deze Spaansche Generaal heette Francisco de Moura Costen Real, Marquis de Castel-Rodrigo, comte de Lumières.

„esté regretté par Mes. les Estats de Brabant, qu'ils ont asseuré & „dit a *van Langren* qu'ils auroint volontairement cōtribué une „somme de CENT MILLE FLORINS pour faire ledit Canal de la Reyne, „s on leur avoit faict faire la demande par *van Langren.* Quel-„ques Princes de condition ont aussi offert leur liberalitez, de tout „quoi il parlera, Lors qu'il metterà au jour plusieurs particularitez „de la guerre du Païs, a l'esgard de ses entremises, où il mon-„strerà que Hulst & Courtray, n'auroint pas estés perdus, si on avoit „voulu suivre ses advis, comme aussi qu'on auroit, il y à 30. ans, „peu secourir Boilducq, par son entremise. Et au contraire ceux de „la Flandre, ont par induction d'un certain amis dudit Commis, „pas voulu respondre sur deux agreables lettres, du Conseil dathe 27. „d'Octobre 1653.

„Au surplus ce ne tousche point a *van Langren* de conseiller Sa „Majesté, ce qu'on devroit faire avec ceux qui sçavent (par l'authc-„rité que Sa Majesté leur a donné) si habillement offusquer les bons „advis, & suivre les invalides, à la ruine de l'Estat. *Van Langren* „supplie seullement qu'il plairoit au Roy de donner ordre qu'on ne „le traitteroit plus en cette maniere, mais au contraire, qu'on vou-„droit considerer ses bonnes services, & observer ce que sa „Majesté a escrit il y a 26. ans, & faire ce que le Ser^{me} Prince „DON JUAN a ordonné au Conseil, afin de se trouver obligé de les „pouvoir remercier & conjoinctement, comme aussi a son Ex^{ce} le „Marquis DE CARACENA [32]), & occasionner quelques signales services „de non moindre consideration de ce qu'il a alegué cy dessus, si Dieu „luy prolongue la vie.

„Si cela se fait reçoiverà Sa Majesté plusieurs avantages, car pre-„mierement sera la Ville d'Ostende à petits frais notablement „fortifié, contre la Mer, & contre les ennemis. 2. les proprietaires „des terres inondez reprenderont leur bien patrimonial, ayant offert „de le rediquer a leur frais. 3. on ne dependera plus l'argent du „Roy si hativement, & si mal à propos. 4. le Roy & l'Estat seront „servis d'un bon Port de Mer, pour en temps de besoin se servir pour „la guerre: & pour le Commerce, la ou au contraire, il ny a pour „le present, pas un Havre en toute la Flandre ou on pourra loger: „ou faire un armée navale si par adventure sa Majesté en vouloit „faire, ou envoyer une de pardeça, pour resister a ses ennemis, „ce que sont des choses deplorables, pour un Estat si fleurissant: „& puissant comme sont ces Païs-bas, particulierement en un temps „que toutes les Princes voisines Trionfent en la Mer. Et sur tout „acquerrera Sa Majesté plusieurs hommes d'esprit pour son service,

„ce que luy semble estre la plus grande fortresse, richesse, & bon heur „d'un Royaulme, Estat, ou Republique qu'on sçauroit desirer."

Daarachter vindt men zijne „Demonstration":

*„Demonstration qu'il y a de l'eau en la Mer lequel ne se bouge „par le Flux ou Reflux, & qu'il faudra oster la grande Dicque de „R. C. I. M.**)

„Van Langren désirant de donner entiere satisfaction au Commis „Roberti, & aux Ingenieurs Coeck, Jansen, & l'Architect Mercks, & „les faire comprendre que tout le travail & les despences qu'ils ont „employé pour faire la Iaulne dicque de I. jusques au Ponton: ne „sert de rien pour profondir le havre, & que ce seroit pire si elle „avoit esté fait jusques la Verde Dicque K. Il leur expliquerà la „maniere du croissant & decroissant de la mer au havre, & les faira „confesser qu'il y a de l'eau en la mer qui ne se bouge, comme il „a escrit au dernier verset de son petit livre d'Ostende †), ce qu'ils „n'ont sçeu entendre ou sçeu refuter.

„Il n'est pas besoing de prouver icy que la mer est agitée & gou-„vernée par le cours & forces attractives du globe de la Lune, puis „qu'on a veu depuis tant de siecles: au rapport des anciens Philo-„sophes & Mathematiciens, que l'element aquatique s'est tousiours „reglée à l'advenant du mouvement & illumination que ce bel astre „ou Monde Celeste; reçoit du Soleil, lequel y contribue aussi beau-„coup, (comme van Langren expliquerà en l'usage de deux Globes §)) „où il touscherà au doit quelques opinions extravagantes & erronées, „qu'aucuns ont en ce temps avācé pour tenir une verité si mani-„feste en perpetuelle ballance.

„Pour ce faire, ils plairont de se trouver avec van Langren par „imagination sur la Caye de la ville, ou bien sur leur grande & „Jaulne dicque, en temps de basse mer, ce qu'ils recognoiteront „lors qu'une petite barque ou piece de bois mise au havre ne se „mouverà, mais quelle demeurera comme inmobil sur la surface „de l'eau (à sçavoir lors qu'il n'y a point de vent ou agitaçion en „la mer) ce qu'ayant un peu contemplé, ils verront que ladite

*) Zie het kaartje N°. III hierachter.

†) Zie het boekje van Aanteekening N°. 34.

§) Het schijnt dus dat van Langren het boekje van zijn vader (zie de Aanteekening N°. 3), dat nog in MSS. aanwezig is, heeft willen uitgeven; of is dit MSS. misschien van hem zelf?

„barcque commencera à se mouvoir lentement au dedans du havre, „augmentant sa course de plus en plus, & lors qu'icelle sera par „exemple arrivé à mi chemin du havre environ de Pier-hoeck, au „temps du demi croissant de la mer, elle sera aussi rehaussé quel-„ques 9. 10. ou 12. pies, selon que la maré devrà estre grande, selon „la saison de l'anné, & selon que les vents septentrionaux auront „rempli & enflée l'Ocean Germanique entre le Pays-Bas & l'Angleterre; „Audit temps commencerà le cours de l'eau aussi un peu à s'a-„moindrir, remplissant peu a peu les Crecques & les Canaux, & se „mettera a la fin sur les schorres dudit quartier, le couvrant peu „à peu soit 2. 3. ou 4. pies d'eauë au temps de la haute mer, & alors „paroistera la Ville comme un Isle ou Isthmus, au milieu de la „mer, & sera derechef comme morte & immobile. Et comme en ces „entrefaits la mer se retire desia par le destroit de Calais & Douvre, „& vers le Septentrion, cela causerà: que la masse aquatique qui s'est „engouffré au havre d'Ostende, se commencerà aussi à se mouvoir „lentement par des tendres pellures ou parties d'eau: agrossissantes „de moment en moment, comme elle s'estoit accreües, on verra „aussi que la terre inondée se commencera à manifester peu à peu, „jusques a ce qu'elle sera entierement descouverte & libre, & alors „passeront les vaches les Crecques pour derechef se mettre en „pasturage.

„Si la dessus on demande a ces Ingenieurs par forme d'admiration, „ou tout ceste grande masse d'eau est demeuré lequel couvroit ladit „terre, ils diront qu'elle s'est retiré au long de leur dicque pour se „rendre en l'Ocean d'ou elle estoit venue, comme n'ayant autre „sortie. Si on leur demande aussi si cest eauë a escoulée par dessus, „par le milieu, ou par dessoubs l'eau lequel reste inmobil au „havre, ils seront forces de dire qu'elle a passé pardessus, puis que „par le melieu, & par dessoubs il ny avoit point de place ou de „vuide. Ce qu'estant comme il est, il n'est plus necessaire qu'on „inonde tant de terres pour escurer le havre, puis qu'il appert que „l'eau de l'inondation n'a jamais sçeu touscher ny attaindre le fond „du havre, mais s'est de temps a autre perdu & egaré en l'Ocean „pardessus l'eau morte & inmobil d'icelle, comme a esté demonstrée, „Ergo & par consequent, il n'est pas bon ni profitable pour le bien „public: ny pour la conscience de Sa Majesté de frustrer plus long „temps les proprietaires de leur bien patrimonial, & sera bien (sauf „melieur advis) qu'on donneroit ordre de faire les dicques & ecluses „que van Langren a representé passé 32. ans afin de pouvoir es-„curer le havre par la cheutte des eaux reservées, puis qu'il appert „que la dicque de R. C. I. M. n'a servi que de la ruine du havre,

„à cause qu'elle empesche que l'eau trouble & sablonneux ne peut „plus s'espandre & asseoir sur la playe de Bredene, mais se repose „au havre, contre & pardela ladite dicque (comme van Langren leur „a prescrit folio 6. de son petit livre*) devoir arriver) il sera partant „necessaire d'abbattre ladite dicque, & dresser au lieu d'icelle les „petites murailles que van Langren a representé, ne fust qu'on le „voulust laisser perdre comme est arrivé avec celuy de Duynkerke, „parce qu'on n'a voulu croire a van Langren.

FIN."

6. Bij dit stuk [33]) behoort nu de „Briefve Description de la Ville et Havre d'Oostende [34])": zij is in vier deelen gesplitst. Vooreerst het kaartje N°. 1†) met het onderschrift:

„MIchel Florencio van Langren, Cosmographe & Mathematicien „de Sa Majesté, a en l'an 1625. proposé la meilleuration des quatre „Ports de mer de la Flandre, & particulierement celui d'Ostende „és années 1627. & 38. Et aiant sadite demonstration été approuvé „audit lieu en l'an 1643. par Son Excelle Don Francisco de Mello, „Gouvr & Capite General du Païs-Bas, & par Monsr le Prince de „Lixain pour lors Gouverneur de Bruge, & de quelques Ingenieurs „à ce appellez: ledit de Langren a partant trouvé à propos de pro- „duire cette demonstration figurative pour satisfaire à quelques „curieux. La ligne A. B. C. D. denote une bonne Dique pour „resister à la furie de la mer, & par lequel on pourra aller par terre „de Bruges jusques à ladite Ville, & subvenir au dãgereux passage „de ce petit bras de mer, E. E. E. sera un petit levé ou dique, par „moien duquel on mettera au sec le poldre note F, au proufit des „proprietaires. Environ de B. & C. pourra estre fait deux demi Es- „cluses lesquelles ne peuvent bonnement estre representez en cette „Carte, servans pour remplir d'eau de la mer l'entre-deux des deux „diques note G. G. G. lesquelles Ecluses seront relâchez deux „fois par jour (c'est 730. fois en un an) environ le fin de la basse „marée. Servant celui de C. pour travailler & parfondir le port „interieur derriere l'Eglise, pour y pouvoir loger quantité de navires. „Et rencontrant cest eau la grande masse d'eau sortans de l'Ecluse „B, ils travailleront conjointement le port exterieur, & la rendra en „peu de temps propre pour y pouvoir sortir & entrer sans aucun

*) Zie het boekje van Aanteekening N°. 16

†) Zie het kaartje N°. II achter dit stuk.

„danger. Et si on y vouloit aussi adjouster le benefice qu'on peut „tirer du Canal de Plaschendale, & de l'inondée note H, celà ne „seroit que mieux pour ledit dessein, lequel il a proposé passée tant „d'anneés, pour empescher une grande inondation que quelques-uns „ont de temps à autre voulu intenter, tant du côté de Bredene, „Santvorde, comme de Steene, pensant par ce moien de meilleurer „le haure, ce que pour beaucoup des raisons van Langren ne sçau„roit croire. Ladite Ville recevra par ce moien plusieurs commo„ditez, & ne sera pas moins fort qu'elle n'est presentement, d'autant „que le Gouverneur gouvernera à sa volonté ce furieux elemēt, „lequel jusques à present n'a voulu obeïr à ses ordres.

„*Cecy a esté imprimée au mois de Mars* 1650."

Dit stuk, derhalve in Maart 1650 verschenen, is waarschijnlijk een uittreksel van het in noot [16]) aangehaalde werkje.

Daarop volgt het tweede gedeelte, de kaartjes No. 2 en 3 *), die in Mei 1651 uitkwamen en te zamen ééne bladzijde beslaan. Dan, op de laatste bladzijde, komt eerst het derde gedeelte:

Censure de quelques sçavans Mathematiciens.

MONSIEVR,

„J'ay consideré à loisir vos inventions sur la retenuë des eaux, „& dicques projettées dans la Carte qu'il vous a pleu me communi„quer, à dessein de meliorer le port & Canal d'Ostende, & mettre „tout ensemble quelques terres en espargne pour le bien publicq, „& les treuve fondées en bonnes raisons Physiques & Mathematiques. „De façon que je ne doute pas, qu'aiant le secours raisonnable que „l'on employera pour y travailler, vous n'en deviez tirer de la „loüange, & de l'avantage pour le bien public: soubmettant neant„moins, en tout cas mon jugement à celuy des plus experts, & vous „remerciant de l'honneur qu'il vous a pleu me faire, par la commu„nication d'une si belle & profitable invention, où je ne descouvre „aucune incommodité, ny pour le temps de guerre, ny pour le temps de „paix, qui ne soit compensée par des plus grandes commoditez. „J'adjouteray volontiers mes prieres envers Dieu pour la bonne issuë „de tout l'ouvrage en cas que l'entreprise soit mise en vos mains. „Du College de nostre Compagnie à Bruxelles 11. de Sept. 1650.

---

*) Zie hierachter de kaartjes Nos. III en IV.

MONSIEVR,

Votre tres-humble & obeissant.
Serviteur en nostre Seigneur
JEAN L'EURICHON. [35])."

„M'Ayant Michel Florençio van Langren Cosmographe & Math^{n} de „sa Majesté, communique un certain concept pour redycker quel-„ques terres inondée au quartier d'Ostende, sans que par icelle le „Havre de laditte Ville reçoivera aucune incommodité. Et m'ayant „à cest effect fait voire quelques Cartes figuratives: & requis mon „sentiment sur sadite proposition. Trouve aprés l'avoir representé „diverses difficultez, sur lesquelles il m'a donné solution: que sadite „proposition est fondé en bonne demonstration, laquelle devra estre „mis en execution au service de sa Majesté, & profit de la commune. „Tout neantemoins sauf meilleur advis. fait à Bruxelles le 17. Sept. „1650.

BART. GAIGNE, *Chanoine de St. Gudila.*"

MONSIEVR,

„J'ay plusieurs fois consideré avec grande attention les choses „que vous avez de tems à autre proposé pour le service de sa Ma-„jesté, tant au regard de vostre profession & speculation de la lon-„gitude *) tant desirée, pour corriger la Geographie, & faciliter les „navigations de la mer, comme ce que touche à cest estat au fait de „la guerre †), me souvenant fort bien de ce que s'estoit passé sur „diverses propositions par vous faites, pour meliorer les ports de mer, „ne doubtant que si on eust suivy vostre advis pour celuy de Mar-„dycke §), qu'on n'auroit pas perdu si facilement cette place avec „Duynkercke: ce que j'ay ouy regreter de plusieurs hommes de juge-„ment. Les marques qu'on a laissé au Havre de Gravelinges par „une despense si inutile serviront à vostre honneur, parce qu'avez „monstré que l'entreprise ne pouvoit estre bonne, & partant on l'a „delaissé.

---

*) Zie de boekjes van Aanteekening N°. 4.

†) Zie het werkje van de Aanteekening N°. 10.

§) Zie het pamflet van Aanteekening N°. 11.

„Et quel plus plaisible moyen pouvoit on imaginer pour couper „le Sasse de Gand [36]) dont le mespris at esté fort nuisible à l'estat. „Ceux de Brusselles se souviendront aussi de vous [37]), principalement „en hiver lors que leurs Caves seront pleines d'eaüe au lieu de „vin [38]). Et comme vous m'avez fait l'honneur de demander mon „opinion sur vostre Carte & demonstration d'Ostende, je diray en „un mot, que ceux qu'auront bien examiné vostre desseing, diront „avec moy, qu'il est fort loüable, & seront tres-aises de vous assis- „ter de tout leur pouvoir; sur ce apres mes humbles baisemens, „je demeureray,

MONSIEVR,

Vostre tres-humble & affectionné serviteur
IEAN DE BOGNEE, *Maistre Mathm. des Pages de S. A. Imperiale, & de l'Academie Royale.*
Bruxelles 10. de Sept. 1650."

MONSIEVR,

„Vous faites bien de proposer un si beau present *) pour celuy „qui sçaura donner une meilleure invention que celle que vous avez „publié pour Ostende. Car apres l'avoir consideré avec attention, „je trouve que l'eau sortant des deux Escluses travaillera à mer- „veille le port interieur & exterieur; le mesme effect se pourroit „aussi esperer par l'inondation des terres interieures du païs. Mais „comme cette preuve est dommageable & rude, je ne le sçaurois „jamais consentir, puis que la vostre est plausible & proufitable; que „je loüe grandement, & serà cause que chascun reprendra de Nep- „tune, ce que Mars luy avoit donné, par inadvertence de ceulx qui „gouvernoient du passé. Je vous en donne partant le bonheur, „ne doubtant ou la generosité de Messieurs les Flamans recognoi- „tront vostre industrie & nostre zele, me signant sur ce.

MONSIEVR,

Vostre tres-humble & tres affectionné serviteur
GERARD GUTSCHOVEN [39]), *Professeur du Roy és Mathematiques en l'Vniversité de Lovain. ce* 20. *Sept.* 1650."

*) Van Langren had eene som van zeshonderd gulden uitgeloofd.

En nu volgt eindelijk het vierde gedeelte, „Verset" van Maart 1652:

„Ce Verset a esté publié en Mars 1652. par forme d'advis.

„*SI on faisoit la Rouge dycque Estaccade ou Palisade au lieu „de la Iaulne, on auroit un magnifique Caye contre la Ville pour „attascher & descharger les Navires, cela ne seroit pas contre les „regles de fortifier comme la Iaulne; l'eau sortant du Havre pres- „seroit entre les deux testes ou Cattaies comme par un entonnoir, & „feroit en brief deloger le bancq. Cêt ouvrage garanteroit & cou- „vriroit les contrescarpes de la Ville (lesquelles sont iournellement „moulles) contre les furieuses attacques & tempestes du Nort, par où „il y auroit plus de calme au Havre que du passé, un Navire „entrant avec orage, s'arresteroit aussi plus aisement & avec moins „de danger contre la Rouge dycque que contre la Iaulne, laquelle si „on la fait, sera cause que la terre du costé de la Ville se deman- „gera, comme on voit en plusieurs Rivieres, elle sera plus incom- „modé pour gens de mer que la Rouge, & le droit du Roy sera „aussi moins asseuré. Ainsi l'ont iugé plusieurs Seigneurs & Inge- „nieurs auxquels van Langren a communiqué ses pensées. Le gran- „dissement de la Ville est une chose de pour soy pouvant estre fait „ou delaissé.*"

7. Bij dit pamflet nu behoort het zeldzame „Apendix" [40]) waarvan op de Leidsche Universiteits-Bibliotheek slechts het eerste vel voorhanden is. Dit bevat:

„Suplica muy humilmente a. V. Ex^{a} tomar la pena de passar „su benigna vista por estas lineas que Don Fran^{co} de la Maza y „Prada me escrivio en 29. de Octubre del año passado de orden del „Ser.^{mo} Principe DON JUAN DE AUSTRIA, como tambien la del S^{r}. „D. FRAN.^{co} DE MELLO, y de las demas Personas entendidas en „este genero de Estudios".

Daarop volgt nu de brief van DE LA MAZA Y PRADA; voorts die van DE MELLO, geteekend „del Campo al Fuerte Roxo a 16. de Setiembre 1642. DON FRANCISCO DE MELLO *Marques de Tordelaguna*". Verder:

„Algunas noticias facadas de differentes Cartas, que el Doctis- „simo Padre Juan de la Faille [41]) Cosmographo Mayor de Su Mag. „y Prof. de Math. de S. A. escrivio a van Langren."

Drie brieven, gedateerd „Madrid, 25. de Mayo 1638", „Junio 23. 1638" en „y Noviembre 21. 1639"; dit alles vult de eerste bladzijde.

De tweede bladzijde begint met een brief van J. VANDE WALLE:

„JE soubsigne Jacques vande Walle chevalier de l'ordre de

„Christo, Comme ayant particuliere cognoissance de la situation des „Ports & costes Maritimes de Flandre, Certifié a la requisition de „Monsieur Michel Florencio van Langren, Cosmographe & Mathe-„maticien de Sa Majesté, que lors qu'on a relachés les Escluses de „Duynkercke & Nieuport à basse marée, que l'effect note en la „certification cy joinct en est suivy. M'asseurant que personne ne „sçauroit dire le contraire, d'aultant que le Capitaine & Ingenieur „Coeck at par diverses fois veü que feu son Ex^{ce} le Marquis Spi-„nola [42]) faisoit ouvrir les Escluses à Duynkercke, lors qu'il failloit „faire sortir quelques grandes Navires de l'Armade en mer, ce que „rendoit ledit Port tres-profond; le mesme at aussi esté practiqué par „divers Capitaines Generaulx de ladite Armade, & autres Ministres, „tant par l'eau douce, comme par celluy de la mer.

„Ledit Capitaine Coeck, & l'Ingenieur Jansen, pourront aussi „asseurer le mesme du havre de Nieuport, lors qu'on at laissé courrir „le Sas & Escluses tout ensemble, si partant son Alteze Ser^{me} or-„donnoit de faire quelques Escluses aupres de Ostende, en la forme „que ledit de Langren at proposé, il n'y at point de doubte ou „cela seroit en tres-grand advantage pour ledit havre, & pourroit „on par ce moyen facilement oster les bancqz de sable presentement „scituez audit havre. Et ne seroit nullement besoing de couper les „dyques du costé de Santvorden pour mettre en ruïne tant de „pays, & mesme la nouvelle riviere allant de Plassendael à Nieu-„port; Pour faire lesdites Escluses & aultres ouvrages d'environ, on „trouvera facilement les deniers pour avancer ledit dessein, sans „que Sa Majesté en sera chargé hormis ce que pourroit couster „l'ouvrage du bois & faschines que quelques uns ont proposé de faire „au costé Orientale dudit havre, lequel at esté jugé tres-necessaire, „& sera de grand benefice. Tesmoing ceste signé en Bruxelles le „12. de Novembre 1650.

JACQUES VANDE WALLE".

en eene verklaring van eenige inwoners van Duinkerken:

„NOus soubsignez inhabitans de la Ville de Duynkercke, certi-„fions avoir veü en plusieurs occasions qu'on a relasché les Escluses „de ladite Ville à basse maré, & que la courrante dudit eau a notoi-„rement parfondi le fond jusques à trois ou quatre pieds ou en-„viron, tant du port interieur comme l'exterieur, en verité de quoy „nous avons signé ceste presente. Fait à Bruxelles le 10. de Novem-„bre de l'an 1650.

JACQUES VAN WALLE, CHRISTOVAL VAN MERSTRATEN, ANTONIO ASSE, SEGERO VAN DORT, ROBERTO GILLES."

8. Daarop vervolgt van Langren :

„*Outre ce que dessus il appert les escrits* [43]) *du tres-sçavant Mathematicien Simon Sterin* [44]), *qu'en plusieurs havres des Provinces* „*Unies on se sert des Escluses pour les entretenir & nettoyer, sans* „*inonder les terres des habitans.*

„Comme j'ay en diverses occasions recognu la grande prudence „& habilité de Messieurs Huygens Seigneur de Zuylichem, de Don „Antonio de Fuertes, & de D. Jayme Ortensio Lopez Almirante „d'Anvers, je n'ay sçeu laisser de mettre au pied de ceste, les lignes „qu'ils m'ont fait l'honnenr de m'escrire".

Vervolgens komen er twee brieven van Constantijn Huygens, den vader :

„Monsieur..... pour le Canal de Marianna*), je suis d'advis avec „vous que c'eust esté un excellent ouvrage, tant pour couvrir ces deux „places, que pour retraite aux vaisseaux du Roy. Si bien que si D. „Antonio d'Ocquendo en eust pû joüir, il n'eust eu que faire de se „laisser battre aux dunes d'Angleterre. Mais je doibs porter la „main à vous desabuser d'une opinio qui nous a beaucoup tenu en „erreur manifeste pardeça, c'est que par le moyē de l'eau retenuë „vous pretendiez d'escurer non seulement vostre havre, mais mesmes „d'avoir detourné les sables, qui pousses par l'assiduité des vents „du Ponent, ont ruyné Duynkercke. Stevin nous a mis ceste here-„sie en teste par son traicté vande Spil-sluysen; mais soyez bien „asseuré que nous en avons tousiours esprouvé un effect tout contraire. „Je m'expliqueray mieux par des exemples qui ne vous sçauroient „estre du tout incognus.

„Dans la digue de Harlem & Amsterdam nous avons 3. furieuses „Escluses de plus de 20. pieds d'ouverture chasqu' une, par où „le lac de Harlem se descharge dans le Tye. Par des tempestes du „Zuyt-west, ce lac senfle si fort, que c'est un horreur à voir com-„bien d'eau il crache par beaucoup de journées au travers desdits „3. Escluses : diriez vous pas que ces cheutes d'eau si violentes y „causeroient des profondeurs grandes & longues? Au contraire, apres „les forces qu'elles y font, elles y portent un sable tout contre, de „mesme que nous voyons arriver à la rupture de nos diques en „Gueldre & alieurs, qui ne font que un fosse ou wiel, & en renvoyant „le sable à quelques lieües a la ronde. Si bien que nous tenons les „enfans desià nez qui verront qu'a Sparendam (qui est ce celebre

*) Zie het kaartje N°. I.

„passage de Harlem dans la mesme dicque) il ne pourra plus pas-„ser aucun bateau, & qu'on sera obligé d'avoir recours ausdites 3. „Ecluses, pour autant mesme que cela pourra durer. Ce que je „vous dis de la fausse opinion de nos Houwers & Spil-Sluyse „est tant verifié en plusieurs lieux, comme a Willemstad & ailleurs, „qu'il ne reste plus aucune doubte la dedans.

„Prenez en gré l'advertissement que je vous en donne, puis que „vous m'avez fait l'honneur de sçavoir mes sentimens sur vos belles „inventions. Je seray bien aise de sçavoir par responce comment „vous les avés goutées. Plusieurs amis ont veu vostre dessein chez „moy & ne s'opposent nullement à vostre fortification ni a mon objec-„tion de l'effect supposé de la retenue des eaux, pour empescher la „nature de conduire ses sables la où il luy plaira. Je me recom-„mande a tout vostre famille, & demeure de tout mon coeur

Monsieur

Vostre tres-humble & affectionné serviteur
C. HUYGENS DE ZUYLICHEM.

Post scriptum.

„Cette que je vous ay representé du peu d'effect des eaux rete-„nues, mon beau-Frere le Seigneur de St. Annelandt [45]) me dit que „sadite terre qui est dans l'Isle de Tertolen, s'est trouvée ruinée „par un sable que la nature avoit jetté peu à peu dans son havre „de dehors, mais que par la force des eaux retenus: & soudainement „relachées il en estoit venus à bout, bien entendu qu'avant que „laisser courrir leurs eaux, ils avoient remué le fonds par où elles „debuoient susser."

Van Langren vervolgt aldus:

„*Et ayant ledit Seigneur aussi veü la briefue description* *) *du* „*Havre d'Ostende, il m'escrivit ce que s'ensuit le* 10. *de Mars* 1660."

„Monsieur,

„Je respond fort tard a vostre depesche du mois de Novembre: „mais c'est que vos desseins †) estant demeurées entre les mains de

---

*) Zie het stukje van Aanteekening N°. 34.
†) Dit zijn de kaartjes Nos. II, III en IV.

„mon Archimede *), il a negligé de m'en faire rapport, dans la „presse des occupations qu'il se donne, tant pour le Ciel que pour „la Terre: car il ne s'arreste pas en si beau chemin †) [46]), & vous en „verrés partir §) [47]) encor de belles choses s'il plait à Dieu. Vos propo- „sitions nous ont tant pleu, que ne cessons de vous plaindre, de „ce que vous estes tombé entre les mains d'un monde qui ne peut, „ou ne veut pas vous entendre..... Souffrez cependant que je vous „redie ce que je pense vous avoir encores objecté, que les eaux re- „tenues & soudainement lachées, ne font pas icy l'operation qu'on „avoit accoustumé de s'en promettre, n'y ayant presque que la premiere „cheute qui fasse quelque effect a fort peu de distance; & se trouve „que ce premier sable retombe tost apres, & fait autant de mal en „avant, que de bien en arriere. C'est ce qui a donné occasion à „une invention notable, que nous practiquons avec beaucoup de suc- „ces au Havre de Maeslantsluys **): est une forme de Rasteau, que je „pense qu'en Espagnol vous nommez Rastro. Il a 15. ou 16. pieds de „long, & 3. ou 4. de large, armé de grandes & fortes pointes de fer. „Cest engin s'enfonce jusques sur le fond, attaché à certain petit „Ponton plat, auquel de part & d'autre on a attaché une aisle de „planches, au moyen de quoy l'eau lachée le pousse vigoureusement, „& ces pointes de fer raclans ainsi la bouë ou le sable, par la raci — ††) „me impetuosité tout s'emporte dans la Meuse, & tient on par là ledit „havre à telle profondeur qu'on desire, ou au contraire des Ecluses „pareilles à celles que je pense que vous proposez, n'estoient aucu- „nement capables d'y faire effect de consideration. Voyez comment „vous goustez l'invention: si vous en desirés instruction plus ample, „je seray tousiours prest à vous la departir, comme estimateur de „vostre vertu: & en ceste consideration tout porté a vous tesmoi- „gner aux occasions de vostre service, & de mon pouvoir, que je „suis d'entiere affection.

Monsieur,

Vostre tres-humble & tres-affectionné Serviteur,
C. HVYGENS DE ZUYLICHEM".

Deze stukken vullen de tweede en derde bladzijde.

---

*) Dit is de bijnaam, waaronder Constantijn Huygens gewoonlijk zijn zoon Christiaan aanduidt.

†) Christiaan Huygens had toen reeds de boekjes van Aanteekening N°. 46 uitgegeven.

§) In 1660 gaf Chr. Huygens uit het boekje van Aanteekening N°. 47.

**) Thans Maassluis.

††) Hier is denkelijk iets weggevallen, of er is bedoeld: mesme.

Daarop vervolgt van Langren op de vierde bladzijde:

„POur moy je confesse ingenuement que je n'ay par cy-devant „esté informée de ceste pratique, & invention, laquelle je louvé „grandement: de plus, que je l'ay du depuis ouy affirmer, par quel- „ques gens de mer qui ont veu l'usage en diverses endroits des „Provinces Unies. Mon intention est de faire le mesme, ou de „remuer & racler le fond sablonneux par plusieurs *Rastiaux de fer* „*en diverses manieres*, ou bien par quelques trouppes de Chevaulx, „estroitissans le havre par des Navires chargez ou autrement, afin „que l'eau sortans des Escluses puisse occasionner ce que j'ay avan- „cée, pour *par ces moyens* empescher qu'on n'inonderoit plus les „terres des gens de bien, mais qu'on redyckeroit, & leur renderoit, „ce que par inadvertence des Ingenieurs du temps passé a esté plus „que 76. ans soubs la domination de la mer".

Nu volgt nog een stuk van een spaanschen brief van de Fuertes; de rest ontbreekt.

9. Wat betreft de briefwisseling tusschen Constantijn Huygens en van Langren, wij bezitten in de „Lettres Françaises de Constantijn Huygens etc., Tome second [1645—1666"] *) nog een lateren brief van Huygens, gedateerd 12 Augustus 1660, waarin hij opkomt tegen de opname zijner beide vorige brieven in de „Appendix": tevens blijkt hieruit, dat dit Appendix tusschen Maart en Augustus 1660 gedrukt is.

„M. F. van Langren, Copie.

„A la Haije, ce 12me Aoust 1660.

Monsieur!

„A mon retour d'un voyage de quelques sepmaines †) je me suis „trouvé fort surpris, de voir par vostre pacquet sans date, comme „vous vous estes advisé de faire imprimer deux de mes lettres §),

---

*) Dit copieboek berust bij de Kon. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

†) Constantijn Huygens ging in Juli 1660 op reis voor zaken van den Prins Willem III en keerde eerst 1 Augustus in den Haag terug. [Dagboek].

§) Zie § 8.

„escrites familierement sur le subject du nettoyement des Haures. „Vous m'eussiez faict plaisir de vous passer de telle entreprise, sans „donner à prendre au monde pourquoy je me mesle des Haures du „Roy d'Espagne qui en effect ne sont pas l'object de mon discours, „mais simplement la speculation dés mechaniques sans autre reflexion. „En suitte vous me rendez scrupuleux de plus entretenir aucune „correspondance sur semblables matières. La pratique de pardecà „dont je vous aij faict mention, est chose publique, et par conse- „quent pourrez vous vous en faire instruire par tout autre que moij.

„Pour ce qui regarde la fin de vostre lettre, par laquelle vous „me parlez de je ne scaij quelle protection que cest estat desireroit du „Roy susdit, je veux bien vous dire, que cela est aussi esloigné de ma „connoissance, que je le tien chimerique et peu conforme à la verité. „L'estat des Provinces Unies, et chacune de ces Provinces, en parti- „culier, sont souveraines et independentes de qui que ce soit. Vous „sçavez ce qui en a esté declaré par vostre Roij mesme, et graces „à Dieu, nous n'avons besoin d'aucune protection que de la diuine „pour nous maintenir en ceste liberté, juste, naturelle, et légitime, „quiconcques en parle d'autre sorte au Roy d'Espagne le trompe et „le presuppose Prince sans foij; ce que je me garderaij bien de „faire, si j'estoij son subject. En somme, Monsieur, je pense que vous „ferez sagement de ne vous ingerer en choses qui ne sont pas de „vostre profession: Au moins pour celle là, vous m'obligerez de ne „m'en plus ouurir la bouche, si vous desirez que je continue de „me dire".

10. Keeren wij tot VAN LANGREN terug. Deze verloor de haven van Ostende niet uit het oog. Omstreeks 1668 gaf hij nog uit: „Copies de la VI, XI et XIII lettre de Don Juan d'Austriche" [48]), waarachter een „Au lecteur", waarbij praktische kennis, politieke luchtkasteelen, en in dien tijd algemeen astrologisch bijgeloof wonderlijk dooreen gemengd zijn.

COPIES DE LA VI. XI. ET XIII. LETTRE QUE S. A. LE SERENISSIME PRINCE D. IVAN D'AVSTRICHE A ESCRIT DE SA ROYALE MAIN *A Michel Florencio van Langren, Cosmographe & Mathematicien de Sa Majesté.*

„I'AY receu vostre Lettre du 28. de Juin, où j'ay veu volontiers „vos bons sentimens .... vous m'avez aussi fait plaisir de me dire „vostre advis touchant l'affaire d'Ostende, & de m'envoyer le dessein

A 3

„pour l'establissement de vos raisons; je souhaitte que vostre capa-„cité soit considerée, & j'y contribueray volontiers auprés de Sa „Majesté en recommandation de vostre personne & de vos services. „Cependant je prie Dieu qu'il vous ait en sa sainte garde. *Badajos* „*ce* 28. *Octobre* 1662.

D. JUAN".

„I'Ay receu vostre Lettre du mois de Septembre passé, où j'ay „veu, avec agréement, les marques de vostre affection & de vostre „zele, dans le raisonnement que vous faites sur les affaires presentes; „Nous devons esperer que Dieu y mettra sa bonne Main, & qu'elles „prendront le biais plus convenable au bien de la Monarchie & de „la tres-Auguste Maison. Cependant vous pouvez croire que je con-„sidere tousiours comme il est juste vostre merite, priant sa Divine „Majesté qu'elle vous ait en sa sainte garde. *Guadalajara ce* 5. *No-„vembre* 1666.

D. JUAN".

„I'Ay receu vostre Lettre du 14. du passé, avec la Carte in-„cluse, où vous representés l'estat present des Provinces du Pays-„Bas, aprés les conquestes des Ennemis la Campagne passée; & „encores que cela n'aye fait qu'augmenter la douleur que je recens „des miseres de ces bons Peuples là (que je voudrois pouvoir soula-„ger de mon propre Sang & ma Vie) je n'aye pas laissé d'agréer „cette nouvelle marque de vostre zele, pour lequel j'auray tousiours „l'estime qu'il merite, & m'en souviendray aux occasions où il „s'agira de vos interests. Cependant je prie Dieu qu'il vous ait en sa „sainte garde. *Madrid ce* 12. *Octobre* 1667.

D. JUAN".

AU LECTEUR.

»*ET afin que personne n'attribuë à ambition ou vantise, que van Langren* »*a mis en lumiere les susdites Lettres de Son Altesse Serenissime, il plaira* »*au prudent Lecteur d'estre informé, que Son Altesse l'en chargea le mesme* »*jour de son départ vers Espagne, à sçavoir le premier de Mars de l'Année* »1659. *de l'aviser de temps à autre, ce qui concerneroit les affaires public-*»*ques des Provinces des Pays-Bas: comme aussi de luy dire, ce qu'il ren-*»*contreroit de curieux aux sciences Mathematiques, Astronomiques, Geographi-*»*ques, Hydrographiques, Geometriques, & en l'Art Militaire ou de Fortifier,* »*en tous quelles sciences sadite Altesse s'avoit avantageusement exercée en son* »*bas âge, sous le tres-sçavant & Reverend Pere* Juan della Faille, *de la Com-*»*pagnie de* JESU; *lequel Sa Majesté avoit choisi, pour estre le premier Pro-*

»*fesseur au College Imperial, erigé en la Cour de Madrid, afin de convier* »*les grands Seigneurs & la Noblesse d'Espagne, à la parfaite connoissance* »*desdites sciences, tres-necessaire pour le bien universel de la Monarchie, tant* »*par Mer que par Terre, & sans lesquelles on ne sçauroit former un par-* »*fait General, Superintendent, ou Ingenieur.*

»*Et ayant lesdites avis grandement plû à Son Altesse Serenissime, il a de* »*mesme eu la bonté, de l'honorer de plusieurs Lettres, tant pour l'animer* »*de poursuivre esdites sciences, comme pour le consoler és traverses inoüies,* »*qu'il a souffert de ses Adversaires, avec une patience tout entiere, sans* »*beaucoup s'alterer des soixante six injures, qu'ils ont inserré en leur Apo-* »*logie* [49]) *scandaleuse, sans aucune honte ou crainte de Dieu, pensant par* «*ledit moyen d'esquiver les Conferences* *) *que van Langren a tant de fois sol-* »*licité au Conseil, pour verifier ce qu'il avoit noté en la Requeste au Roy* †), »*qu'il fit imprimer en l'an* 1659. *à sçavoir, que tout ce qu'ils avoient fait* »*& fairoient au Havre d'Ostende contre son avis ne serviroit de rien, comme* »*on voit presentement qu'il est pire que jamais.*

»*Et qu'on n'avoit point de raison, de vouloir imputer les mal-heurs des* »*Pays-Bas (survenus és Années* 1657. *&* 1658.) *au Serenissime Prince* »DON JUAN D'AUSTRICHE, *comme firent quelques mal informez, mais qu'iceux* »*competoient à ceux qui avoient passionnement denigré & empesché les tres-* »*importantes propositions Militaires, que ledit van Langren avoit avec fon-* »*dement & zele representé passé* 20. 30. *&* 40. *années, pour en quelque* »*maniere redresser la Monarchie du costé Septentrionale, lesquelles notices* »*furent si agreables à la Serenissime Princesse Madame* ISABELLA, *de eternelle* »*memoire, qu'elle l'envoya en l'An* 1631. *en Espagne, pour les donner à con-* »*noistre à Sa Majesté, lequel en fit tant d'estime, comme on voit par ses* »*Royales Lettres dattées du* 10. *de May* 1633. *De mesme ont aussi fait les* »*Serenissimes Princes* CARDINAL INFANTE, *le Duc* DE CARIGNAN [50]) & DON »ANDRÉ CANTELMO *en l'An* 1638. *comme on voit par leurs escrits. Quelques* »*grands Seigneurs d'Espagne, d'Allemagne, & du Pays-Bas ont aussi mani-* »*festé leur grand regret par escrit, qu'on a si aigrement rejetté les choses* »*que ledit van Langren a representé: Comme amplement sera demonstré au* »*Discours* §) *Politique & Militaire, qu'il a preparé pour Sa Majesté la Reyne* »*Regente, & pour les Seigneurs Directeurs de la Monarchie, afin qu'ils ne* »*seroient point esmerveillez des mal-heurs passez, & de ce que Sa Majesté* »PHILIPPE IV. **) *qui est en gloire, a si liberalement cedé aux Hollandois &* »*François, ce qu'ils ont desiré, pour donner repos à son Peuple, ayant tout* »*le mal qu'on souffre presentement esté causé du premier, à cause de la foi-* »*blesse & nudité du Pays.*

»*Il plaira doncques aux Nobles, & aux fidels Habitans, & Vassaux*

*) Zie bladz. 12.

†) Zie het stuk van § 4.

§) Het schijnt, dat dit stuk niet meer bestaat.

**) Philips IV was reeds 17 September 1665 overleden.

»*de Sa Majesté de considerer avec quelle tendresse, affection, & fondement* »*sadite Altesse a escrit les Lettres cy-dessus, & avec combien de zele & valeur* »*il desire de soulager le bon Peuple affligé, en defence de nostre jeune &* »*innocent Monarque* CHARLES II. *& de la Reyne* MARIE ANNA *sa Mere.*

»*Prions partant sa Divine Majesté, qu'il luy plaise de conduire au plus*»*tôt ce Valeureux & digne Prince pardeçà, & d'incliner Sa Majesté* LOUYS »XIV. *de desister de ses pretentions non fondées, comme les Seigneurs &* »*sçavans Personnages* LISOLA [51]), STOCKMANS [52]) *& autres ont si ample*»*ment demonstré, qu'il n'y a pas une plume sçavante en toute la France,* »*qui les sçauroit refuter. Prions en outre nostre Seigneur, que les Prelats* »*Ecclesiastiques dudit Royaume, veulent imprimer en sa Royale Memoire, les* »*mots que marqua la* SACRÉE MAIN DE DIEU *contre la muraille, au mesme* »*temps que le grand Roy* BALTHASAR, *se glorifioit de sa grande puissance,* »*& de luy dire que ledit passage a esté noté par le S.* ESPRIT *aux Livres* »*sacrez, pour advertir les Souverains de se gouverner selon la raison & Jus*»*tice; & de mettre en consideration, ce que nostre Seigneur a voulu dire,* »*d'avoir retiré* HENRY IV. *& son Fils* LOUYS XIII. *sur un mesme jour de S.* »BONIFACE *le* 14. *de May, de l'An* 1610. *&* 1643. XXXIII. *ans (qui est* »*l'âge de* JESUS-CHRIST) *l'un aprés l'autre, ce qui est une chose inoüie.* »*Ne seroit-ce pas à cause que l'un et l'autre ont voulu intenter ce que* »*nous voyons presentement avec tristesse? Je crains si Sa Majesté ne con*»*sidere ce que dessus, ou au moins se conforme au bon conseil que Monsieur* »*de* LYONNE [53]) *luy a donné (sans y penser) de restituer au jeune pupille* [54]) »*ce qu'il luy a osté* [55]), *sans forme de Justice, que les larmes des oppressez* »*obligeront la misericordieuse Main de Dieu de se mettre en deffence des* »*Pays-Bas, & de la tres-Auguste Maison; comme le Prince* DON JUAN *a si* »*confidemment marqué en sadite Lettre, aprés que van Langren l'avoit avisé,* »*ce que la France ruminoit & tramoit en l'An* 1666. *Si cela ne le contente,* »*je le prie du profond de mon cœur, de vouloir consulter avec les plus sça*»*vans Astrologues de la France, & de leur faire examiner les aspects des* »*jours* 14. *de May, jusques à celuy de l'An* 1676. *inclus, & de noter s'il* »*y aura un qui sera, à leur advis, fatal à sa Royale Personne, comme ont* »*estez ceux de son Ayeul & Pere, à cause d'avoir manqué à la parole jurée* »*en la Paix de Vervin en l'an* 1598.

»*Et veritablement c'est une chose triste & déplorable, de voir que ce Jeune,* »*Grand, & Puissant Monarque* LOUYS XIV. *& toutes les autres Puissances* »*de la Chrestienté, n'employent pas plustôt leurs valeureux Gentils-hommes &* »*Soldats à la conqueste de la Terre Sainte, de la Natolie, de l'Archipelage,* »*de la Grece, ou bien des Costes de la Mediterranée, où il y a tant de* »*Royaumes & Principautez à gaigner, & où les Ecclesiastiques feroient une* »*conqueste de plusieurs millions d'ames à* JESUS-CHRIST, *lesquelles se gouf*»*frent presentement (à nostre confusion) en la geule du Lion Infernal; ou* »*bien d'assister la Noble Republique de Venise? C'est en cela que les bons* »*Ministres des Souverains devroient appliquer leur pensées, afin de meriter*

»*la Benediction du Ciel en ce brief cours de nostre vie. Et comme van* »*Langren (parlant comme Cosmographe de Sa Majesté) a une bonne con-* »*noissance des regions de la Terre & des Mers, il estimeroit à honneur &* »*bon-heur, s'il pouvoit monstrer à Sa Majesté Tres-Chrestienne (avec per-* »*mission de Sa Majesté & la Reyne Regente, par induction de Son Altesse)* »*en quelle forme, maniere, & avec quelle facilité il se pourroit faire le plus* »*Puissant & le plus Illustre Monarque de l'Univers, & acquerir plus de* »*renommée que n'ont fait tous ceux qui l'ont precedé. Si sadite Majesté* »*incline à cette sainte expedition, on devra avec haste faire une reparticion* »*pertinente des Costes de la Barbarie entre les Princes Chrestiens, avec* »*promesse de se donner la main l'un à l'autre, selon ce qu'avoit premedité ce* »*digne Roy* CHARLES IX. *de joindre ses forces avec celles de l'Empereur* »*& du Roy Catholique, & ne voulut en nulle maniere entendre aux persua-* »*sions de quelques Grands Princes de la France, qui le sollicitoient pour* »*rompre avec* PHILIPPE II. *(au temps que les Provinces des Pays-Bas esto-* »*ient troublées par l'Heresie) mais leur repliqua d'un zele tres-saint,* QUE »CE N'ESTOIT PAS DE SA DIGNITÉ ET GENEROSITÉ FRANÇOISE DE TROMPER UN »ROY SON PARENT ET AMIS, *chose digne d'estre noté a l'honneur de sadite* »*Majestê.*

»*N'ayant point de doute si cela se faisoit, que toutes les Puissances &* »*Nobles y concourront par Mer & par Terre: Sa Sainteté* CLEMENT IX »*y employeroit aussi ses sacrées Mains, avec toute l'Eglise Romaine, en* »*imitation de ses Predecesseurs, comme on voit par les Lettres qu'ils ont* »*escrit aux Roys d'Espagne, de France & de Portugal, passé plusieurs années.* »*Ce qui donneroit un notable employ & profit aux gens de Mer, tant Espag-* »*nols, François, Italiens, Portugais, Anglois & Hollandois, où il y a des* »*Navires, & des Matelots en abondance. Si sa Sainteté, le sacré College,* »*avec les Roys & Princes Souverains inclinent à cette sainte entreprise, il* »*leur supplie en toute humilité, & sincerité de luy commander en ce que* »*pourroit estre de leur service.*

»*Au reste & pour finale conclusion, sera le benin Lecteur adverty, qu'en-* »*core que sadite Altesse fait mention en sa derniere, & en plusieurs autres;* »*d'avoir soin pour les interests dudit van Langren, cela doit estre attribué* »*à sa grande & insigne bonté, car van Langren ne luy a jamais fait ses* »*plaintes du debil payement de son gage, ny de ceux qui ont retardé, &* »*empesché à son grand regret, le voyage d'Espagne & des Indes Occidentales,* »*que Sa Majesté desiroit de luy, mais luy a simplement & sincerement avise* »*ce qu'il avoit escrit à sa Sainteté* [56]*), par les benignes mains de l'Eminen-* »*tissime Cardinal* ROSPIGLIOSI [57]*), & ce qu'il a representé à Sa Majesté Im-* »*periale, & au Roy Tres-Chrestien, avec ce qu'il jugeoit digne d'un si grand* »*Prince, & en particulier ce qui concernoit le Havre d'Ostende, lors que le* »*Seigneur Marquis de* CARACENA *) *fit inonder le Poldre de Santvorde, sur*

*) Dit is Don Luiz de Benavides, zie Aant. 32.

»*des foibles avis de quelques uns, monstrant que le tout ne servoit de rien;* »*comme son Excellence le Seigneur Marquis de* CASTEL-RODRIGO *a oculaire-* »*ment reconnu sur le lieu, apres avoir consideré le grand model de Bois,* »*dudit Havre, lesquels desseins de van Langren ont hautement esté loüez des* »*Seigneurs Duc de* BOURNOVILLE [58]), *des Comtes* MARCIN [59]), *&* DE SALASAR [60]), »*en l'assemblée qu'on tenoit le* 23. *de May* 1660. *Sadite Excellence a par* »*ainsi sagement resolu de suivre de point en point ce que ledit van Langren* »*a representé en l'an* 1627. *passé* 40. *ans.*

»*Outre ce ayant son Exc. le Marquis de* CASTEL-RODRIGO, *aussi veu les* »*Lettres de Son Altesse, & les escrits des Seigneurs de la Toison d'Or, de* »*tous les Generaux de l'Armée, & de plusieurs Illustres Seigneurs, s'est* »*aussi incliné pour faire le Canal de Malines*), que ledit van Langren a* »*representé, tant en benefice du Commerce, comme pour la fortification du* »*Pays, & seureté des Villes de Malines, Vilvorde & de Bruxelles, (comme* »*clairement se voit en sa Carte dudit projet* [61])) *il a mesmes en consideration* »*dudit affaire, deux fois continué Messieurs les Magistrats de Malines, &* »*son Excellence de* CARACENA *une fois, par où apert combien ledit Canal a* »*esté jugé necessaire. Il ordonna* [62]) *aussi, sur l'avis du Seigneur Comte de* »MARCIN, *de faire inonder les prairies d'Anderlecht & de Molenbeck, pour* »*rendre la Basse Ville de Bruxelles hors d'attacque, comme on a veu en* »*l'an* 1655. *à la satisfaction du Serenissime Archiduc* LEOPOLDE ; *le Prince* »DON JUAN *l'auroit aussi intenté en l'an* 1658. *si les Ennemis ne s'eussent* »*retirez. Mais comme en Esté* 1667. *l'Escluse du Pont des Faquins a esté* »*fait contre l'intention de van Langren, par quelques deputez, & qu'ils l'ont* »*fait intituler en la Gasette Num.* 6. *l'Escluse admirable, pensant d'offusquer* »*l'invention que ledit van Langren, avoit publié en l'an* 1644. †) *sadite Ex-* »*cellence sur l'avis des Seigneurs Comtes de* MARCIN *&* RENNEBOURG, *aux* »*remonstrances dudit van Langren, l'a fait demolir, comme un Ouvrage* »*inutile, nonobstant qu'elle avoit cousté douze mille florins, au lieu de* 300. »*que van Langren vouloit frayer. Cette diligence de van Langren & la* »*prudence de son Excellence a esté la seule cause que le bas quartier de* »*ladite Ville a esté sauvé d'un terrible mal-heur, lors que la Riviere Senne* »*debordoit outre mesure le* 17. 18. *&* 19. *du present mois de Fevrier, ce qui* »*luy fait croire que à la fin Messieurs du Magistrat ne voyant nul remede* »*certain pour prevenir ledit mal, inclineront un jour pour le remedier.* »*Priant aussi son Excellence de luy vouloir faire l'honneur de conserver en* »*sa memoire, ce que ledit van Langren luy a representé pour le plus grand* »*bon-heur dudit Pays, tant à l'esgard des peu frayeuses Fortifications des* »*Villes, d'Anvers* [63]), *Bruxelles, Vilvorde & Ostende, comme pour joindre le* »*commerce de l'Empire à celle du Mer Ocean, comme il monstra à la* »*Serenissime Infante* ISABEL *en l'an* 1626".

---

*) Zie het boekje van Aanteekening N⁰. 58.

†) Vergelijk Aanteekening N⁰. 37.

11. En daarop deed van Langren in 1670 nog zijn laatste beroep [want in 1675 overleed hij], in dezer voege [64]):

„AYant Michel Florentio van Langren, Cosmographe & Math^{e} de „Sa Majesté depuis quelques années, recognu la grande modestie & „Prudence de Son Ex^{ce} Monseigneur LE COMTE DE MONTEREY [65]), lequel „Sa Majesté a sagement esleu pour Gouverner, regir & maintenir l'estat „du Pays-bas, en quoy il s'employe si infatigablement, qu'il n'y a „Personne ou ils en ont une satisfaction indicible; Et comme ledit „Seigneur a une grande affection & inclination pour les Sciences „Mathematiques, Je me suis trouvé obligé de le supplier en toute „humilité, (& par le devoir d'office) de vouloir prendre un esgard „particulier, de ne se laisser abuser par la multitude des voix de „ceux qui ont la maniance & direction des Fortifications, & en par„ticulier de celles qui regardent les eauës, la Marine & ports de „Mer, en quoy quelques-uns de ses Predecesseurs Gouverneurs du „Pays ont grandement estés seduits, par la multitude des voix, „comme on recognoistera par le present discours, qu'il a mis en „lumiere pour espargner sa langue, & ne sçavoir respondre là où ils „parlent incessamment en son desavantage. Et ayant dit à Son „Ex^{ce} qu'il avoit accommodé son Model de bois, avec le Canal Cir„culair, le nouveau & viel havre d'Ostende: Il luy a commandé de „la faire porter à la Court, asseurant qu'il auroit un grand soing „de semblables matieres, esquelles on employe ordinairement le plus„clair argent du Pays: Et fit deux jours aprés escrire un billet au „Remonstrant sur ce que concerne les affaires du Sas de Tenre„monde, où il avoit esté envoyé deux fois par ceux du Conseil des „Finances, afin de considerer l'estat d'icelle, & où on n'a pas com„mis un petit erreur à grands frais du Roy.

„Et ayant Son Ex^{ce} cependant resolu de faire un voyage vers la „Flandre, avec intention de recognoistre la constitution presente du „havre, duquel sadite Ex^{ce} a tant ouy parler l'année precedente, il „a jugé estre de son obligation, pour faciliter cette importante entre„prinse, de mettre en peu de mots, ce que s'est passé sur ledit „affaire depuis l'an 1627. lors qu'il a representé le remede d'icelle, „à la Ser^{me} & jamais assé honorée Princesse Madame ISABEL de „glorieuse memoire, deux ans aprés qu'il avoit par son ordre fait „une particuliere description des costes, & des bancq maritimes de „la Flandre.

„La raison pourquoy audit temps on ne mit en pratique les deux „Esluses qu'il voulut faire en B. & C. *) avec ce qu'il avoit ex-

*) Zie hierachter het kaartje N°. V.

„cogité en A. embouschure du Canal de Plaschendael, estoit que „Son Ex^{ce} le Marquis *Spinola* (qui avoit gaigné Ostende) estoit de „longue main imbu par divers Ingenieurs, & par ceux d'Ostende, „qu'on la deveroit remedier & entretenir par l'inondation que les „rebelles d'Ostende avoient pratiqué en l'an 1584. par la couppure „d'une forte & courte Dycke, qui lioit ladite ville aux Dunes Orien- „tales, non pour faire un havre, mais pour la fortifier par l'eauë „contre le Prince de PARMA [66]), qui avoit l'année precedente fait „mine de la vouloir assieger.

„Les Ser^{mes} Princes ALBERT & ISABELLA, ayant recuperé ladite „ville en l'an 1604. eurent une grande compassion de la ruïne de „tant de particuliers, qui avoient leurs terres inondées pour le ser- „vice du Roy, commandoient en l'an 1608. par induction de Mons^{r} „de Vicq, Bourgemaistre du Francq, qu'on tireroit une dique „depuis la redoute de S. Albert, par la Gavelose Speye, & Santvorde, „jusques à la dijcke de Bredene, quel ouvrage fut en l'an 1612. „prolongué vers les Dunes, la Ser^{me} Princesse ayant en l'an 1622. „fait construire le Sas & le Canal de Plaschendael pour faciliter le „commerce de Bruge, voyant que la haure Oriental s'estoit eslargy „par le flux & reflux, & que celle d'Occident avoit esté ruyné à cause „de la guerre, & lequel n'avoit jamais servy au commerce mais à „la pescherie.

„Elle voulut aussi en l'an 1626. qu'on mettroit en espargne le „Poldre de Santvorde, par une Dycke depuis Hogebrugge vers „Slycke, quel ouvrage ayant esté fait sans l'advis dudit Marquis; il „y accourut sur le mauvais rapport de ceux d'Ostende: & commanda „au Gouverneur *Montero*, de donner la premiere poëlle à ladite „inondation, sans vouloir permettre de cueiller les fruits d'icelle, ce „que causa une subite mort dudit Gouverneur. Mais si-tost qu'il „s'estoit retiré vers Espagne, commanda S. A. de le reserrer, à „cause du peu d'effect que faisoit l'eau de ladite inondation.

„Toutes qu'elles controverses & opinions, à esté la seule cause, „que ceux d'Ostende, les Ingenieurs, & Superintendents de la Forti- „fication, se sont tousiours opposés aux Escluses que le Remonstrant „avoit representé à ladite Princesse.

„Et ayant le Remonstrant releüe sadite proposition aprés son „retour d'Espagne en l'an 1638. par induction & Conseil du Ser^{me} „PRINCE THOMAS de Savoye, ceux des Finances requeroint l'advis „du Commis *Kesseler*, & de l'Ingenieur *Cock* *) lequel se souvenant

*) Hij bedoelt Jean Heymeissen Coeck.

„du havre de Grevelingues, avisa qu'il ne pouvoit croire que „van Langren auroit aucune cognoissance de semblables matieres, „nonobstant qu'il avoit memoire de ce qu'il avoit peu de mois „auparavant fait comprendre par demonstration au Ser^me^ Prince „Cardinal INFANTE par induction au Prince THOMAS & aux Seig^rs^ „*Don Andre Cantelmo & Don Estevan de Gamarra*, que le nouveau „havre de Grevelingues, que luy & l'Ingenieur de Bucq, & le Com-„mis & Superintendent *Kesseler* avoient mis en cervelle au Marquis „*de Fuentes* General de la Mer, & ledit Marquis à sa Ma^té^, lequel „commanda de le faire *Sin replica ninguna.* Quelle demonstration „ayant esté oüy avec regret de son Alteze & de toute la Cour; Il „escrivit à sa Ma^té^ que l'entreprise du nouveau havre ne valloit rien, „& fut delaissé, nonobstant qu'on avoit consumé en icelle plus que „700. mille florins, & à la mesme occasion perdu les importantes „villes de Damvillers & Bredal que S. A. ne sçavoit secourir, pour „n'avoir à la main les sept ou huit mille soldats qui s'estoient „retranchés prés ledit ouvrage, l'Ingenieur *Cock* ayant eû ordre de „conferer de cêt affaire avec le Cosmographe, ne le donna autre „responce (selon le thon ordinaire des Ingenieurs) que de dire, ILS „L'ONT AINSI VOULU: Et afin qu'on seroit satisfait de sa sincerité, „& du zele qu'il a pour le service de sa Ma^té^. Il offrit par sa requeste „qu'il mit aux Royales mains de son Altesse, de donner la qua-„triéme partie de son gage de 200. florins par mois (qu'il luy avoit „accordé 70. jours auparavant) à la personne qui sçauroit par de-„monstration refuter sadite contradiction, comme cela paroit par „sadite requeste, authentiqué par le Secretaire de sa chambre.

„Et ayant du depuis cette passion venimeuse esté accreuë, & comme „heredité de quelques Ingenieurs, & des deux suivans Superintendens „de la Fortification qui l'ont succedé, à sçavoir Mons^r^ de *Roberti* & „*Maes*, ils se sont à chậque pas opposez par la multitude de leur „voix enchaînée & ligué, contre tout ce que le Cosmographe a re-„presenté de temps à autre, pour le maintien & defence de cêt Estat, „& mesme contre ce que sa Ma^té^ avoit ordonné de faire par ses Roya-„les lettres.

„Et n'ayant le Remonstrant en aucune maniere voulu, ou sceu „desister de ses entreprises, pour estre fondé en bonnes & fermes „raisons Physiques & Mathematiques, en quoy ces bonnes gens sont „peu versées, il les a tousiours genereusement alarmées, les conviant „de vouloir venir en diverses amiables conferences, pour entendre ses „raisons demonstratives devant des personnes versées és sciences, „sous le jugement desquelles il s'estoit tousjours souûmis, comme „appert par ses requestes authentiques, & papiers imprimés, & afin

„de leur donner un amorce profitable, il offrit en l'an 1651. *) „estant à Ostende avec deux Archevesques & deux Evesques †), de „leur donner *six cent florins* §), s'ils le pouvoient confondre en un „point par demonstration, comme cela appert par l'Acte Notorial „de van Heede audit Ostende date 18. Juillet; mais comme cela leur „sembloit peu, il augmentoit ladite courtoisie à *trois mille Escus* „en l'an 1660. lors que le S^r^. Marquis de CARACENA y alla, comme „paroit par impression; mais tout en vain: Et au lieu qu'ils auroient „gaigné honneur & argent, ils publioient au mesme temps leur APO„LOGIE **) schandaleuse contre luy, le donnant plus que soixante-six „noms si injurieux, qu'il n'y a eu aucune Personne de sain juge„ment, & qui cognoissent au Cosmographe qui la desestime pour „cela, & ont les trois Autheurs Cock, Jansen, & Mercks gaillardement „esté chastiés ††) par la plume de *Don Aιonse de Zepeda* [67]); efforçans „neantmoins audit Marquis par la multitude de leur voix, de faire „inonder le Poldre de Santvorde, à la ruïne de tant de bons vas„saux de sa Ma^té^, lesquels perdent en icelle bien 60. mille florins „par an, & le Roy son domaine; Et si on voulut calculer ce que „les proprietaires ont perdu dés l'an 1584. par l'inondation de 's Her„Woutermans, & de Nordée, cela monteroit à non moins que six „millions de florins, & tout cela pour fortifier la ville, & meliorer la „havre, ce qu'on auroit peu faire par industrie & avec profit, comme „il dira cy-dessous.

„Estant chose tres-notable que *Cock*, qui avoit en l'an 1643. esté „contraint d'approuver les deux escluses du Cosmographe, en pre„sence de Don FRANCISCO DE MELLO, de *Don Carlo Guera*, & du „Gouverneur *Don Juan de Almarras*, ce qu'auroit esté executé, s'il „n'avoit esté defait à Rocroy; & nonobstant que *Cock* a representé „les mesmes Escluses en la jointe que le Marquis de CARACENA „tenoit le 23. de May 1660. avec les Seigneurs *Comte de Marzin*, „*Duc de Bournoville*, & le *Comte de Salasar*, & qu'il avoit escrit à „van Langren le 17. de Septembre 1660. qu'il n'estoit pas d'intention „de faire inonder les terres qu'on avoit redicqueés, il se laissa neant„moins abuser par le pervers conseil de quelques-uns, & des Inge„nieurs, Jansen & Mercks, sur promesse qu'il seroit payé des 8000.

*) Zie het stuk van Aanteekening N^0^. 33.

†) Zie hiervoor § 4, blz. 13.

§) Zie § 4, blz. 12.

**) Zie het boekje van Aanteekening N^0^. 49.

††) Zie de beide stukken, aangehaald in § 12, en voornamelijk het tweede, gedaeerd 16 September 1660.

„florins qu'il trouvoit de son gage qu'il a eu. Mais helas! au lieu „que ledit havre auroit esté melioré, il semble que DIEU mesme l'a „voulu ruïner & serrer par un grand bancq de sable (comme arriva „jadis & à peu prés par un mesme cas au fameux havre de Stavere en „Frize; & à Dunkerkes, parce qu'on n'a pas voulu croire à ce que „le Cosmographe leur a representé en l'an 1625.) tellement que à „Dunkerkes & à Ostende, il y peut à peine entrer ou sortir un „Navire chargé avec haute marée, & ont ceux du Magistrat de Dun- „kerkes, considerant leur ruïne, amiablement requis & prié au Cos- „mographe le 2. de Novembre 1669. de se vouloir transporter par „delà, pour donner son bon advis sur la melioration d'icelle, avec „offre de remuneration. Par quelle action a esté accomply, ce qu'il „avoit publié par escrit en l'an 1650. en son petit livre*) d'Ostende „folio 7. que en l'an 1660. & 70. le havre de Dunkerkes ne servi- „roit plus de rien, & qu'ils s'en plaindroient de n'avoir suivy son „advis. Le mesme succedera à celuy d'Ostende, s'ils ne veulent „ouvrir leurs yeux de consideration.

„Quelles sommes de deniers on a inutilement employé çà & là „sur le seul rapport desdits Super-Intendens, sçauroient ceux du „Conseil & ceux de Bruges mieux que van Langren. Et certes, si „on ne se donne haste de remedier ledit havre, la ville de Bruges „ne perdera non seulement le commerce: qu'elle auroit peu esperer „de l'industrie du Cosmographe, comme il demonstre par ses requestes „autentiques de l'an 1642. mais les rentiers qui ont contribué pour „faire le receptacle & l'alargissement du Canal vers Plaschendal, „tomberont au mesme inconvenient des rentiers de la *Blende vaert*, „qu'on a fait en l'an 1639. vers Dunkerke (& lequel il a intitulé „en ses Cartes Geographiques *Fossa Fernandina*) quels deniers ils „auroient veritablement deu employer à la melioration de leur havre „d'Ostende, sans chercher la mer en un pays si esloigné, sur l'advis „de ceux qui ne demandent que de travailler, comme il leur repre- „sentoit au mesme année 1639. lors qu'il fut envoyé à Snaeskercke „pour entrevenir audit affaire, qui fut assoupi sur ce qu'il represen- „toit par escrit à ceux du Francq.

„De toutes quelles erreurs & contrarietez ont esté origines, que „sa Ma^té n'a non seulement despendu plus que de cinq à six „millions de florins mal à propos en la fortification du Pays, mais „qu'il a perdu les meilleures places d'icelle, à sçavoir la ville de „Hulst, Mardyck trois fois, Dunkerke deux fois, Courtray avec ses

*) Zie Aanteekening N°. 16.

„consequences; & esté obligé de donner Carta blanche aux Hollan-„dois en l'an 1648. pour avoir la paix, & tout de mesme au Roy „Tres-Chrestien en l'an 1660. quelles ennemis on auroit ensuite de „ses advis & estudes peu empescher leur progrés, & obliger les pre-„miers de se conformer à la raison; comme il a fait voir à sa Maté, „dequoy font foy ses Royales lettres.

„Et d'autant que tout ce que dessus est veritable, & tres-bien „cognu au Serme. Prince Don JUAN D'AUSTRICHE, il a en divers „temps eu la bonté de le consoler par ses benignes lettres *), sans „aucune de ses merites.

„Ne doutant & esperant, que lors que son Exce. LE COMTE DE „MONTEREY aura oüy ses raisons, & veu les lettres que sa Maté „luy a fait escrire, ne laissera d'y tenir sa bonne main, pour „incliner quelques-uns du Conseil qui se sont tousiours excusés de „n'avoir sceu empescher les susdits deservices pour ne point entendre „la fortification.

„Quelles matieres ayant à peu pres esté representées au Seigneur „Marquis de CASTEL-RODRIGO, aprés qu'il avoit passé sa judicieuse „veüe sur ses escrits & le model de bois, il ne voulut depuis ce „temps rien entreprendre sans l'advis du Remonstrant, & le fit venir „avec luy vers Ostende, au mois de Mars 1667. estant chose à „plaindre que son indisposition l'obligea de retourner sans rien faire, „& ayant le Remonstrant à cas fortuit veu le dessaing du Sas qu'ils „vouloient placer au Canal devant le fort de S. Philippe, il asseura „aux Seigneurs qui furent en la barque, que son concept n'estoit „non seuleman plus propre pour la navigation & pour la havre, „mais qu'elle cousteroit bien cent mille florins moins, sur quoy fut „dit que s'il le pouvoit verifier, qu'il meriteroit un present de 25. „ou 30. mille florins; Ce qu'ayant fait comprendre à son Exce, & „fait voire sa demie excluse avec le Canal circulair il ordonna le „28. d'Avril par decret qu'on luy donneroit quatre mois de son gage „afin de retourner vers Ostende pour designer sondit desseing sur „le terroir, mais survenant la guerre des François & qu'il se retira „vers Espagne, le tout demeura en suspence.

„A l'arrivée de son Exce LE CONNESTABLE DE CASTILLE [68]) ont ceux „du commerce de Bruges de nouveau representé leur Sas, estans „accompagnés de Monsieur le Comte *de Solre*, du Surintendent *van* „*Ophem*, avec ses Ingenieurs, sans dire un seul mot de ce qui s'estoit „passé en la barcque, & de ce que CASTEL-RODRIGO avoit ordonné.

---

*) Zie over deze brieven § 10, bladz. 33.

„Et ayant son Ex^{ce} prins resolution sur icelle à l'insceu du Remon„strant, il se trouvoit obligé en conscience & de ce qu'il doit au „service de sa Ma^{té} de le dire par quatre mots d'escrits, que leur „Sas ne serviroit de rien, offrant de la verifier par demonstration en „presence des plus habils Seigneurs de la Cour, ce qu'ayant esté „fait avec applaudissement, & esté remarqué par ceux du Sas, ils „employent toute leur industrie pour faire varier à son Ex^{ce} afin de „suivre la multitude des voix, sur quoy il ordonna selon leur inten„tion, que le Cosmographe iroit avec les Deputés & leurs Ingenieurs „vers Ostende, où ils ne voulurent en aucune maniere permettre qu'il „parleroit un seul mot avec les Ingenieurs, de la matiere de leur „voyage, l'obligeant comme par force de mettre son advis entre leur „mains pour le joindre avec les autres, lesquels avoient tous estés „dictez sur une mesme note de leur musique.

„Son Ex^{ce} et ceux de la jointe voyant que le Remonstrant estoit „seul en son opinion, ordonna le 3. jour de Pentecoste*) de mettre „la poëlle en terre pour commencer le Sas, ce que fut fait avec „triomphe, cannonades & musquettades.

„Le CONNESTABLE & toute la Cour ayant deux mois après esté „informé que van Langren avoit raison, il commanda bien expres„sement qu'on auroit à delaisser ledit ouvrage, nonobstant qu'on „avoit frayé en icelle entre 25. & 30. mille florins, dequoy ayant „le Remonstrant publiquement esté congratulé par son Ex^{ce} & de „ceux de la Cour, & ayant par aprés consideré, que ce seroit chose „tres-difficile de pouvoir faire desloger un si large, haute & esloigné „bancq de sable qui s'augmentoit de jour à autre, devant l'em„bouschure du havre, & dequoy on ne sçauroit faire la preuve, sans „premierement faire le Canal Circulair, avec la demie Escluse & „les deux Dammes, à une despence de 300. mille florins, au lieu „qu'un de ses amis avoit soustenu en la jointe qu'elle passeroit les „900. mille.

„Ce que le fit resoudre de conseiller à Son Ex^{ce} le CONNESTABLE „de vouloir faire bouscher le havre Oriental, comme elle estoit devant „l'inondation, & de ouvrir une nouvelle estroite & courbe du costé „Occidental de ladite ville, avec une demie escluse ou un Sas „comme on voudra.

„Cette pensée du Remonstrant pleut de telle maniere à son Ex^{ce} „& à ceux de la Cour, que le Seigneur *Don Antonio de Pimentel*[69]) „(qui a grande cognoissance de la Mer pour avoir gouverné plusieurs

*) Dit was de

„années à Cadis en Espagne) l'asseura de la part de son Ex^{ce} que „sa Majesté luy donneroit 500. mille florins pour faire ledit ouvrage „si necessaire pour la navigation & fortification d'Ostende; le Cos-„mographe n'ayant autre dessein que de bien servir à sa Majesté „sans interest, replica *in verbis* & en publicq, qu'il ne voulut pas „que sondit dessein passeroit les 300. mille florins, cêt autant comme „ceux de Bruge avoient estimé leur Sas, & par lequel on n'auroit „pas desseisché un pied des terres inondées.

„Le Seigneur CONNESTABLE desirant d'estre informé de cette pen-„sée par ceux d'Ostende, ordonna au Remonstrant de le suivre, où „estant arrivé, on luy mit en avant six ou sept moyens pour meli-„orer le havre, si extravagans & si peu fondés en raison Mathema-„tique & Phisique, qu'il faudroit beaucoup de papier pour les refuter, „ce que causa qu'il ne print aucune resolution, de crainte d'estre „encores abusé, & ne laissa pas de bien parler du concept du Cos-„mographe & de le remunerer à son insceu au retour à Bruxelles.

„Ce consideré il espere que son Excellence Monseigneur LE COMTE „DE MONTEREY, aura un soing particulier de ne se tousiours conformer „à la multitude des voix, qui ont seduit quasi tous les Gouverneurs, „mais sur la seule demonstration Mathematique, dequoy depend cette „faculté, & non des opinions comme des autres matieres; Et veritable-„ment si cela avoit esté observé, on n'auroit pas perdu tant de „places si importantes qui ont donné un grand branle à toute la „Monarchie, comme on verra par ce qu'il en a escrit en forme „d'histoire*).

„Et afin d'affirmer son dire il a asseuré à sadite Ex^{c} par escrit „d'estre content que tout ce que sa Majesté le doit de son gage „(desquels il ne doute en aucune maniere ou il sera ponctuellement „payé) seroit consumé en ce qu'il a representé, tant à l'égard du havre „d'Ostende †), comme du Canal de Malines §), lequel a esté jugé si im-„portant par les plus Illustres Seigneurs du Pays, pour le maintient „de Bruxelles, Vilvorde & Malines, contre quel concept ses emula-„teurs, se sont aussi opposés sans aucune forme de raison. Mais si „ces Messieurs veullent aux mesmes conditions essayer leur remedes „qu'ils ont proposé pour ledit havre, il attendra jusques à ce qu'ils „auront augmenté leur fautes.

„Estant chose certaine si son Ex^{ce} ordonne de faire ledit havre,

---

*) Zie hierover bladz.   noot.

†) Zie het boekje Aanteekening N^{o}.

§) Zie het werkje van Aanteekening N^{o}.

„il n'y aura son semblable entre la riviere Albis & le d'estroit de „Gibraltar, veu que ce sera en icelle perpetuellement haulte eau, „tenant les navires flottans sans se crever sur le fond, & on pourra „à chasque moment naviger sur une mesme superficie d'eau de „Ostende vers Bruge & Snaeskercke, sans estre obligé de attendre „aprés le croissant ou decroissant de la Mer, passant le Sas de „Plaschendael comme si elle ny estoit point, car elle demeurera „tousiours ouverte, où on la pourra demolir comme il a representé „à ceux des Finances au mois de May 1670. pour se servir des „materiaux pour faire le nouveau havre.

„Les orages & tempestes de la Mer seront bannis hors le Pays, & „n'auront les Dyckes plus besoing d'estre reparées & entretenües à „si grands frais, les proprietaires de s'Her-Woutermans, Nordec & „Santvorde reprenderont leur bien patrimoniel, duquel ils ont esté „frustrez dez l'an 1584. & 1662. & laquelle leur sera renduë à „telle condition que le Gouverneur d'Ostende (qui aura les Clefs de „l'Ocean & des rivieres entre ses mains) pourra en temps de Siege, „& de necessité retenir autant d'eau sur le Pays circonvoisin comme „il trouvera convenir pour la deffence de la ville, laquelle sera par „ceste industrie mieux fortifié contre le sable & les ennemis qu'elle „n'est presentement, (encores qu'on y a tant frayé les années passées) „car Nepture & Eolus qui ameinent le sable, n'ont jusques à present „pas voulu obeir à ses ordres, à cause qu'il n'a aucune Escluse en „son pouvoir pour arrester ou exclure les eaües, & afin que Mon- „sieur le Gouvern. d'Ostende seroit remuneré de ses paines, on le „pourra ceder une bonne partie dudit schorre pour son service.

„Par cêt ouvrage faira son Ex^{ce} un tres notable service à nostre „Seigneur, à Sa Majesté, à l'estat, & aux proprietaires, qui ne ces- „seront de le donner & souhaiter mille benedictions.

„Les Navires estrangers qui ont une crainte dudit havre à cause „de ses escuils, & qui ont prins leur route vers celle des voisins, y „retourneront à la foulle, voyant un si beau asile & logement des „navires, qu'ils auront à Ostende, & à Bruge, n'ayant point de doute „ou par ce moyen ces deux villes agonissantes reprenderont haleine „& se remettera Bruge (Dieu aydant) sur le mesme pied comme on „la veu jadis du temps que le havre & la ville de l'Escluse appar- „tenoit à un mesme Seigneur.

„C'est le souhait de celuy qui est, & qui a tousiours esté un „tres-humble & affectionné amis & serviteur des bons serviteurs du „Roy, & en particulier de ceux qui aiment les belles sciences. A „Bruxelles 25. Aug. 1670."

12. In den bundel, mij door den Conservator Arnold uit Gend toegezonden, bevinden zich nog twee stukken, die hier tehuis behooren, en waarop ook in de vorige stukken werd gewezen. Het eerste [70]) is een brief van den Kapitein Adjudant Don Alonso de Zepeda y Adrada aan den Marquis de Fromista y Caracena; het tweede [71]) een rapport van denzelfden over de „Apologia", tegen van Langren geschreven door diens tegenstanders, de ingenieurs.

13. Ten slotte valt nog van onzen Michel Florentz. van Langren mede te deelen, dat hij bij zijne vrouw Jeanne de Quantere verscheiden kinderen kreeg o. a.:

Arnoul, geboren te Brussel den 28 Augustus 1626;

Michel, geboren te Brussel den 7 September 1629;

Erie Raphael, geboren begin December 1631, peetekind van Erycius Puteanus;

Een dochter, geboren in 1635;

en verder nog, dat hij, als jong man van 29 jaren, bij Janneke van Deynse een onecht kind had, Marie-Françoise, die hij in Oktober 1657 legitimeerde.

AANTEEKENINGEN.

[1]) Van dit boek, dat in 1604, 1614, 1623, 1644, 1696 herdrukt is, en waarvan in 1599 en 1644 een latijnsche, en in 1610, 1619, 1638 fransche vertalingen verschenen, bezit de Leidsche Universiteits-bibliotheek een fraai exemplaar. Het is in vier afdeelingen verdeeld, met de titels:

a.) ITINERARIO, || Voyage ofte Schipvaert/ van Jan || Huygen van Linschoten naer Oost ofte Portugaels In-||dien/ inhoudende een corte beschryvinghe der selver Landen ende Zee-Custen/ met aen-||wysinge van alle de voornaemde principale Havens/ Revieren/ hoecken ende plaetsen/ tot noch || toe vande Portugesen ontdeckt ende bekent: Waer by ghevoecht zijn/ niet alleen die Conter-||feytsels vande habyten/ drachten ende wesen/ so vande Portugesen aldaer resi-derende/ als van-||de ingeboornen Indianen/ ende huere Tempels/ Afgoden/ Huysinge/ met die voornaemste || Boomen/ Vruchten/ Kruyden/ Specerijen/ ende diergelijcke materialen/ als oock die || manieren des selfden Volckes/ so in hunnen Godts-diensten/ als in Policie||en Huijs-houdinghe': maer oock een corte verhalinghe van de Coophan-||delingen/ hoe en waer die ghedreven en ghevonden worden/ || met die ghedenckweerdichste ghesehiedenissen/ || voorghevallen den tijt zijnder || residentie aldaer. || Alles beschreven ende by een vergadert, door den selfden, seer nut, oorbaer, ||ende oock vermakelijcken voor alle curieuse ende Lief-||hebbers van vreemdigheden. || [Vignette: in het midden eene vloot, in de vier hoeken gezichten op Antwerpen, Amstelredam, Enchuyzen en Middelborch, fec. L. Cornelij] || t' AMSTELREDAM, || *By Cornelis Claesz. op 't Water, in 't Schrijf-boeck, by de oude Brugghe.* || Anno CIↃ.IↃ.XCVI. in-folio.

8 bladz. bevatten titel, octroy, opdracht aan de Generale Staten, het „Prohemio totten Leser", vier lofdichten en een portret van den schrijver „Aetate 32. Anno 1595", waarbij in vier hoeken gezichten op Goa, Mossambycke en St. Helena, eiland en bergen.

A—N. blz. 1—160, met 9 kaarten en 28 platen.

b.) REYS-GHESCHRIFT || Vande Navigatien der Portugaloy-||sers in Orienten/ inhoudende de Zeevaert/ soo van Portu-||gael naer Oost Indien/ als van Oost Indien weder naer Portugael; Insgelijcx van Por-||tugaels Indien nae Malacca, China, Japan, d'Eylanden van Java ende Sunda, soo in 't heen vaeren/ als in 't weder||keeren; Item van China nae Spaensche Indien/ ende wederom van daer nae China; Als oock van de gantsche || Custen van Brasilien/ ende alle die Havens van dien; Item van 't vaste landt/ ende die voor Eylanden (Las Antillas || ghenaemt) van Spaensche Indien, met noch de Navigatie vande Cabo de Lopo Gonsalues, naer Angola toe/ aen || de Custe van Aethiopien; Mitsgaders alle die Coursen/ Havens/ Eylanden/ diepten ende ondiepten/ sanden/ droogh-||ten/ Riffen ende Clippen/ met die gheleghentheydt ende streckinghe van dien Desghelijcks die tyden vanden || jare dat de winden waeyen/ met die waerachtighe teeckenen ende kennisse van de tyden/ ende het || weer/ wateren/ ende stroomen/ op alle die Orientaelsche Custen ende Havens/ ghelijck || sulcks alles gheobserveert ende

A 4

aen ghetepkent is/ van de Piloten ende || s' Coninghs Stuer-luyden/ door de ghestadighe Navi-|| gatie/ ende experientie byde selfde ghe-||daen ende bevonden. || *Alles seer ghetrouwelijcken met grooter neersticheyt ende correctie by||een vergadert, ende uyt die Portugaloysche ende Spaensche in || onse ghemeene Nederlandtsche Tale getransla-||teert ende overgheset.* || Door JAN HVYGHEN van LINSCHOTEN. || [Vignette en het onderschrift als boven; alleen het jaartal is M.D.XCV].

Aa—Ll. bldz. 1—134, met 1 kaart.

c.) Een seker Extract ende Sommier van || alle de Renten/ Domeynen/ Tollen/ Chijnsen/ || Imposten/ Tribuyten/ Thienden/ Derde-penninghen/ en incomsten des || Coninghs van Spaengien over alle zyne Coningkrijcken/ Lan-||den/ Provintien en heerlickheyden/ sodanigh als die alles || uyt de Originale Registers der respective Rekenca-||mers getrocken zijn; Met een corte en clare || beschryvinghe/ vande regieringe/ macht || ende afcompste der Coninghen || van Portugael. || Door Jan Huyghen van Linschoten, uyt den Spaenschen || in onse Neder-duytsche Tale ghetranslateert || ende overgheset. || [Vignette: kaart van „Hispania"] || t' AMSTELREDAM. || *By Cornelis Claesz op 't Water, in 't Schrijf-boeck, by de Oude Brugghe.* || Anno CIↃ.IↃ.XCVI.

Mm. bldz. 135—147.

d.) Beschryvinghe van de gantsche Custe || van Guinea, Manicongo, Angola, Monomotapa, ende tegen over || de Cabo de S. Augustijn in Brasilien/ de eyghenschappen des gheheelen oceanische || Zees; Midtsgaders harer Eylanden/ als daer zijn S. Thome, S. Helena, 't Eyland || Ascencion, met alle hare Havenen/ diepten/ droochten/ sanden/ gron-||den/ wonderlijcke vertellinghen vande Zeevaerden || van die van Hollandt/ als oock de be-||schryvinghe vande bin-||nen landen || Midtsgaders de voorder beschryvinghe op de Caerte van || Madagascar, anders 't Eylandt S. Laurens ghenoemt/ met de ontdeckinge aller drooch-||ten/ Clippen/ mennichte van Eylanden in dese Indische Zee liggende/ als oock de ghelegentheyt van 't vaste||landt vande Cabo de boa Esperança, langhs Monomotapa, Zefala, tot Mossambique toe/ ende soo voorby || Quioloa, Gorga, Melinde, Amara, Baru, Magadoxo, Doara, &c. tot die Roo-Zee toe/ en wat u daer voort || vande beschryvinghe ontbreeckt/ hebdy in 't boeck van Jan Huyghen van Linschoten int lange; || Met oock alle de navigatien van alle vaerden die de Portugesche Piloten ende || Stierluyden oyt beseylt hebben/ uyt haer Zee-caert-||boecken ende geexperimenteerde stucken ghe-||trocken/ ende in ons tale in 't || lichf ghebracht. || Daerom is de oncoste van dese nette, perfecte Caerten ghedaen, met oock dese beschry-||vinghe daer op, om dat sulcks eyste aen 't heerlijck werck van || Jan Huyghen voorschreven. || Volcht noch de beschryvinghe van West-Indien int langhe/ met hare Caerte. || [Vignette: Wereldkaart in twee halfronden door Jodocus Hondius] || t' AMSTELREDAM. || *By Cornelis Claesz. op 't Water, in 't Schrijf-boeck, by die oude* || *Brugghe*, A⁰ M.D.XCVI.

A—H, blz. 1—82, waarvan de eerste 14 niet gepagineerd. Daarop volgt:

Waerschouwinge voor de Boeckbinders, waarbij de opmerking: Dese naevolghende Caerten moeten ghebonden wesen in d'Itinerario ofte || 't eerste deel verhaelt/ ofte oock wel in 't tweede deel int Reijsghschrift by de || navigatien/ nae 't ghelieven vanden cooper byde aengewe-||sen pagien ofte folien/ als volght. [12 kaarten, en 30 platen].

Hieruit volgt, en evenzeer uit het verdere, dat deze werken *a*, *b*, *c* en *d*, niet afzonderlijk zijn uitgegeven, zoo als gewoonlijk beweerd wordt, maar werkelijk bijeen behooren: dit blijkt ook nog uit de privilegie bij het werk *a*, geteekend „*Sabati* 8. *Octobris* 1594".

INHOVT DES BOECKS [8] blz. Op het einde:

Sommighe fauten ofte erraten des Boecks inden letter druck inde Itinerario. — In 't Boeck van 't Reijs-ghschrift ofte vande Navigatien.

[2]) JAN HUYGEN VAN LINSCHOTEN werd in 1563 te Haarlem geboren en stierf te Enkhuizen 8 Februari 1611. In December 1579 trok hij naar Sevilia, waar zich twee zijner broeders ophielden; de een stierf aan de pest, en met den oudsten vertrok hij in April 1583 naar Goa in het gevolg van den Aartsbisschop van Indiën, Don FREY VINCENTE DE TONSECA: toen deze vergiftigd was, kwam VAN LINSCHOTEN in 1589 eerst

naar Spanje, en toen naar zijn familie te Enkhuizen terug. In 1594 werd hem opgedragen een zeeweg om de Noord naar China te zoeken, en meende hij dien te hebben gevonden; bij een tweeden tocht in 1595 waren zij minder gelukkig. Zijn motto was: Souffrir pour parvenir. Zijn Reis-Geschrift heeft, ook voor dat het gedrukt was, veel bijgebracht om de reis van Houtman mogelijk te maken.

3) Brief Traicté ou maniement d'aucuns, mais principaux usages, des deux globes celeste et terrestre, ensemble d'explications de tous les cercles, lignes, instruments, et autres verbis certis y appartenants, composés et dediés au tres-reverend Jaques Boonen, Eveque de Gand, 1617.

Van dit werk bestaat evenzeer een hollandsche tekst van 1616 en nog een spaansche vertaling alle in MSS.

4a) Advertencias de Miguel Florencio Van Langren, Matematico de su Magestad, a todos los professores y amadores de la Matematica, tocantes a la proposicion de la longitud, por mar y tierra, que ha hecho a su Magestad Catolica.

4 vellen in-4⁰. Denkelijk van 1634.

4b) La Vendadera Longitud por Mar y Tierra, Demostrada y Dedicada a su Magestad Catholica Philippo IV. Por Miguel Florencio van Langren Cosmographo y Mathemathico de su Magd. en Flandres. Con las Censuras y paraceres de algunos renombrados y famosos Mathematicos desto siglo, que van puestos en orden de los fechos defas dichas aprobaciones, M.DC.XLIV. in folio.

5) PLENILVNII || LVMINA AVSTRIACA PHILIPPICA || HAEC NVSQVAM VULGATA, GENERI TAMEN HVMANO || MAXIME VTILIA, IMO NECESSARIA, || MICHAEL FLORENTIVS VAN LANGREN || Mathematicus et Cosmographus. Regius || ORBI TERRARVM PROPONIT. || *Bruxellae* || V. *Idus Februarij* CIƆ.IƆC.XLV

Een blad in groot-folio, bevat de maankaart met aanhalingen uit Theodoretus, Plutarchus, Cicero, Achilles Tatius, en Seneca daaromheen. Daaronder volgt de tekst in drie kolommen.

6) Zie "Oeuvres et Correspondance de Christiaan Huygens, Tome II, pag. 558, Lettre No. 27a." een brief van Constantyn Huygens aan Pater Marin Mersenne, waarin bij spreekt over het voorkomen van beider namen op de maankaart van van Langren le Mathematicien de Bruxelles.

7) CONSTANTINI HUGENII, || Equitis ZulechemI, ZeelhemI, &c. To-||parchae; Principi Auriaco à Consiliis; || MOMENTA || DESULTORIA; || POËMATVM || *LIBRI XIV.* || *Editio altera, multò priore auctior,* || *Procurante* LUDOVICO HUGENIO. C. F. || Cùm || *Praefatione* CASPARIS BARLAEI. || [Vignette: de sfeer] || HAGAE-COMITUM, || Ex Typographia ADRIANI VLACQ. || CIƆ.IƆC.LV || *Cum Privilegio Ill. Ord. Holl. ac West-Frisiae.* in 8⁰.

* — * * * * *, 80 blz. bevatten

titel en in-verso de *Syllabus.* || *LIB. XIV.* || FARRAGO. || EPIGRAMMATUM LIBRI XII. || OTIORUM JUVENILIUM RESEGMINA.

Twee platen: één Mercurius, die dit werk te koop aanbiedt, en een fraai portret van den schrijver met eigenhandig onderschrift:

Ordinis et Veri et Justi constanter amantem
Hugenium si quis noscere curat, hic est.
Quidquid ad has quiscumq; vides accedere laudes,
Fama, levis, mendax, garrule finxit anus.

CONSTANTER

CASPARIS BARLAEI || PRAEFATIO || AD || LECTOREM. [17] blz.

LUDOVICUS C. F. HUGENIUS || Lectori S. [2] blz.

Lofdichten van Daniel Heinsius, Theod. Graswinckel, Marcus Zuerius Boxhornius C. Boyus, Henricus Bruno, (3 stuks). [5] blz.

MOMENTORUM || INSCRIPTIUNCULAE || AUTORIS (28) [9] blz.

RESCRIPTA || DE || MOMENTIS, (46) [41] blz.

Daarop volgt:

A—Dd. blz. 1—423.

[8]) JOHANNIS HEVELII || SELENOGRAPHIA: || *SIVE,* || Lunae Descriptio; || *ATQUE* || ACCURATA, TAM MACULARUM || EJUS, QUAM MOTUUM DIVERSORUM || ALIARUMQUE OMNIUM VICISSITUDINUM, || PHASIUMQUE, TELESCOPII OPE DEPREHEN-||SARUM, DELINEATIO. || In quâ simul caeterorum omnium Pla-||netarum nativa facies, variaeque observationes, || praesertim autem Macularum Solarium, atque Jovialium, Tubospicillo || acquisitae, figuris accuratissimè aeri incisis, sub adspectum ponuntur: nec || non quamplurimae Astronomicae, Opticae, Physicaeque quaestio-||nes proponuntur atque resolvuntur. || *ADDITA EST, LENTES EXPOLIENDI NOVA RA-||TIO; UT ET TELESCOPIA DIVERSA CONSTRUENDI ET EX-||periendi, horumq; adminiculo, varias observationes Coelestes, imprimis quidem Ecli-||psium, cùm Solarium, tum Lunarium, exquisitè instituendi, itemq; diametros stellarum veras, viâ || infallibili, determinandi methodus: eoq; quicquid praeterea circa ejusmodi || observationes animadverti debet, perspicuè || explicatur.* || CUM GRATIA ET PRIVILEGIO S. R. M. || GEDANI || edita, || ANNO AERAE CHRISTIANAE, 1647. || *Autoris sumtibus, Typis Hünefeldianis.* || in-folio.

Daarop volgt een door J. Folck Polonus gegraveerde titel en fraai portret van den schrijver, de opdracht aan de stad Danzig, een „Ad Lectorem" (9 bladz.) „Honoratissimorum Amicorum sponte exhibita Carmina" (8 blz.) en Indices (5 blz.).

A—Bbbb. bladz. 1—563 bl. bevat:

Blz. 1—108 Prolegomena Selenographiae Caput I—V.
„ 109—496 Selenographiae Caput VI—LVI.
„ 497—548 Selenographiae Appendix.
„ 549—563 „Index Rerum" en „De Mendis relictis."

Het keurig gedrukte werk is versierd met 150 niet minder fraaie platen.

[9]) ALMAGESTVM || NOVVM || ASTRONOMIAM VETEREM || NOVAMQVE COMPLECTENS || OBSERVATIONIBVS ALIORVM, ET PROPRIIS || Nouisque Theorematibus, Problematibus, || ac Tabulis promotam, || INTRES TOMOS DISTRIBVTAM || QVORVM ARGVMENTVM || Sequens pagina explicabit. || AVCTORE || P. JOANNE BAPTISTA || RICCIOLO || SOCIETATIS IESV || FERRARIENSI || Philosophiae, Theologiae, & Astronomiae professore. || BONONIAE || Ex Typographia Haeredis Victorij Benatij MDC.LI. || *SVPERIORVM PERMISSU.* in-folio.

12 bladz. bevatten een door F. Curtus gegraveerden titel en hoofdtitel, titel van PARS PRIOR || TOMI PRIMI, inhoud der drie deelen: Het eerste vindt men in twee Partes opdracht aan Hieronymo Cardinali Grimaldo". Praefatio ad Lectorem Blz. I—XLVII en Indices.

A—Ccccc. T. 1. Pars Pior bladz. 1—763.

II. Pars Posterior heeft een nieuwe titel; dan opdracht, blz. I—XVIII „Epitome Genealogiae Grimaldae Gentis" en Indices.

A—Qqqq. blz. 1—676.

De Tomus Secunden en Tertius zijn nimmer verschenen, maar den inhoud van dit derde deel vindt men terug in het later in 1665, verschenen werk:

ASTRONOMIAE || REFORMATAE || TOMI DVO, || QVORVM PRIOR OBSERVATIONES, || HYPOTHESES, || ET FVNDAMENTA TABVLARVM, || Posterior praecepta pro vsu Tabu-||larum Astronomicarum, || et ipsas Tabulas Astronomi-||cas CII. continet. || PRIORIS TOMI IN DECEM LIBROS DIVISI, || Argumenta Pagina sequenti exponuntur. || *AVCTORE* || P. JOANNE BAPTISTA RICCIOLO || SOCIETATIS JESV, || FERRARENSI, || BONONIAE, MDCLXV. || Ex Typographia Haeredis Victorij Benatij. || *SVPERIORVM PERMISSV.* in-folio.

14 blz. bevat een door L. Tintus gegraveerden titel, de opdracht aan Ferdinand Maria Keurvorst van Beieren, en Indices.

Blz. I—XII. Prolegomena.

A—Aaa. blz. 1—374.

Het Tomus II bevat:

a. 8 bladz. Indices.

A—V. bladz. 1—36, 1—128.

[10]) Tormentum bellicum trisphaerium, quo tres ordine globos ex eodem tubo exploduntur. Serenissimo, mitissimo, augustissimo Imperatori Ferdinando III, Germaniae, Hungariae, Bohemiae, Dalmatiae, Croatiae &c. regi, Austriae Archiduci, etc. suum hoc tonandi, fulminandique genus offert Michael Florent van Langren, Belga, mathematicus reg. catholicus. Bruxellae. Ioh. Mommaert. 1640, in folio

8 bladz.

Men heeft een herdruk van dit werkje met den titel

TORMENTVM || BELLICVM || TRISPHAERIVM : || QVO || TRES ORDINE GLOBI || EX EODEM TVBO || Distincto Incendio & Tempore || exploduntur. || A MICH. FLOR. LANGRENO || *inventum.* || AB ERYCIO PVTEANO || *descriptum.* [LOVANII, || Typis ANDREAE BOUVETI, || Anno M.DC.XLV. 12⁰.

32 blz.] met 1 plaat.

Dit werkje is opgenomen in:

ERYCI PVTEANI || MVNITIONVM || SYMMETRIA || FACILLIMIS LINEIS || CONSTITVTA. || Architecturam Militarem || compendio exhibens. || *Ad usum aevi & Militiae nostrae, cum* || *Antiqua comparatae.* || [ornament] || LOVANII. || Typis ANDREAE BOUVETI. Anno M.DC.XLV.

A—E, 119 blz. in-12⁰.

Waarvan het voornoemde werkje blz. 89—119 beslaat.

Deze ERYCIUS PUTEANUS had reeds vroeger gegeven:

Er. Puteani Dissertatio de belli fulmine Langrano, quo plures ordine & distincto incendio globi ex uno eodemque tormento exploduntur. Bruxellae. Typis Mommartinis, 1640, in folio.

[11]) Description particuliere du grand changement que le Sa-||ble ou banc de MARDYCK (c'est PORTVS ICCIVS || selon Monr. Chiflet) a fait depuis l'an 1624. || jusques au temps present 1653. || *A Bruxelles, chez Françhois Schovardts a la Mer sauuage, proche* || *l'Eglise de S. Jean.*

4 blz. in folio met 4 kaartjes.

Van dit werk bestaat nog een andere uitgaaf, zonder drukplaats en datum.

Description Particvliere du Canal De Marianne et du grand changement que le Sable ou bancq de Mardyck (c'est Portus Iccius selon Monsr. Chiflet) a fait depuis l'an 1624. jusques au temps present 1653. In folio.

En verder nog een derde met eenige varianten

[12]) Jean Jacques Chifflet, geboren te Besançon in 1588, stierf in 1660 te Brussel. Hij werd doctor medicinae, maar de studie van oudheden trok hem het meest aan, „Liifmedicus" geworden van de Infante Isabella, verkreeg hij later dezelfde betrekking bij Filippo IV te Madrid, die hem opdroeg de geschiedenis van het Gulden Vlies te schrijven. Later keerde hij naar Belgie terug. Hij schreef o. a.

Portus Iccius J. Caesaris demonstratus Auet J. J. Chiflet, Madrid. 1626 in 4⁰.

[13]) Fernando Kardinaal-Infante, derde zoon van Filippo II, koning van Spanje, en van Margaretha van Oostenrijk, werd geboren den 17 Mei 1609 en overleed te Brussel den 9 November 1641. Hij was toen Gouverneur van de Nederlanden.

[14]) Thomas van Savoye was de zoon van den Hertog Charles Emmanuel I van Savoye en van Catharina van Spanje, dochter van Filippo II.

[15]) Leopold Wilhelm, Aartshertog van Oostenrijk, was de tweede zoon van Keizer Ferdinand II en van Maria Anna van Beijeren. Hij werd den 5 Januari 1614 te Graz geboren en overleed in 1662. Bestemd tot geestelijke, werd hij in 1625 bisschop van Passau, later generallissimus bij het leger.

[16]) Profytelijcken Middel om met indyckinghe van Landt, de Zeehaven van Ostende te verbeteren. Als een sake, daer die van Vlaenderen veel aen gheleghen is. Met een klare Demonstratie, dienende om te bewysen, datter water in de Zee is, dat zich

niet en beweeght door ebbe of vloedt. Bedacht ende by een gestelt, door Michael Florentius van Langren, Cosmographe ende Mathematicus van zijne Majesteyt. Tot Brussel. Bij Jan Mommaert, achter het stadt-huys in de Druckerye, 1650, in 4° met twee kaartjes.

17) Isabella Clara Eugenia van Spanje, dochter van Filippo II en Isabella van Frankrijk, huwde in 1598 Albert, Aartshertog van Oostenrijk. In 1599 vertrokken zij als Regenten naar België.

18) Bartolomeo de Fuentes (de Fonte), admiraal bij de genoemde vloot, deed later vele ontdekkingen in de Zuidzee, die echter lang voor apocryf werden gehouden.

19) Hij heet Jean Heymeissen Coeck.

20) Francisco Manuel de Mello werd den 23 November 1611 te Lissabon geboren, alwaar hij den 13 October 1665 overleed. Opgevoed door de Jezuïten, ging hij eerst dienen in het leger van Spanje en werd daarbij „Mestre de Camp". Later trok hij naar Brazilie en Portugal, en schreef daar een groot getal boeken.

21) Carlo van den Bosch werd 23 Juli 1650 Bisschop te Brugge, en den 8 Juni 1660 te Gend; hij stierf aldaar den 6 April 1665.

22) Andreas Croesen werd den 10 September 1651 Bisschop te Roermond en den 17 Juni 1657 te Mechelen; hij overleed aldaar den 8 November 1666.

23) Anton Triest werd den 9 Juli 1617 Bisschop te Brugge en den 15 Maart 1622 te Gent; hij stierf aldaar den 28 Mei 1657.

24) Casper Dubois (Nemius) werd den 23 Mei 1634 Bisschop te Antwerpen en den 19 Maart 1652 Aartsbisschop te Kamerrijk; hij overleed aldaar in November 1667.

25) Jacobus a Castro werd den 11 April 1611 Bisschop te Roermond en overleed aldaar den 24 Februari 1639. Het is niet bekend, wie zijn opvolger was.

26) Don Juan van Oostenrijk, zoon van koning Filippo IV en van de tooneelspeelster Maria Calderonna, werd in 1629 geboren en overleed in 1679. Hij was Generaal in Spaansche dienst, en werd in het jaar 1656 naar de Nederlanden gezonden.

27) Louis II van Bourbon, eerst hertog van Enghien, later Prins van Condé, zoon van Henry II, Prins van Condé en Charlota de Montmorency, werd „le grand Condé" genoemd. Hij werd in 1621 geboren en overleed in 1686.

28) Albert, Aartshertog van Oostenrijk, zesde zoon van Keizer Maximilian II en van Maria van Oostenrijk, werd in 1559 geboren en overleed in 1621. Hij was eerst Kardinaal, maar huwde in 1598 de Infante Isabella Clara Eugenia van Spanje en werd toen als Landvoogd naar de Nederlanden gezonden. (Zie Aanteekening No. 17).

29) Guillaume Bette, Baron en sedert 1633 Marquis van Lede, ridder in de orde van St. Jacques, was eerst bailluw van Gent, later Spaansch Gouverneur van Limburg en Gelderland. Hij was in het begin der 17de eeuw geboren en stierf den 23 Juni 1658 bij de verdediging van Duinkerken.

30) Johann Ludwig, Graaf van Isenburg en Büdingen, was de zoon van Wolfgang Heinrich I, Graaf van Isenburg en Büdingen, en van Maria Magdalena. Hij werd in 1622 geboren, en woonde vele oorlogen bij.

31) Maria Anna, dochter van den Keizer van Oostenrijk Ferdinand III, en van Maria Anna van Spanje, werd geboren den 22 December 1634 en overleed den 16 Mei 1696. Den 8 November 1649 huwde zij met Filippo IV, koning van Spanje.

32) Don Luiz de Benavides, Carillo y Toledo, Marquis van Fromista en Caracena, Graaf van Pinto, was de zoon van Don Juan de Benavides en Donna Anna de Carillo y Toledo. Hij diende in het spaansche leger, werd „gouverneur des armes" en gouverneur in de Nederlanden tot 1660 en overleed te Madrid den 6 Januari 1668.

33) Dit stuk „AV ROY" bestaat uit 2 bladen folio A en B, bevat 8 bladz. waarvan de laatste wordt ingenomen door de „*Demonstration qu'il y a de l'eau en la Mer lequel ne se bouge par le Flux ou Reflux* || *&* *qu'il faudra oster la grande Dicque de R. C. J. M.*

[34]) BRIEFVE DESCRIPTION || DE LA VILLE ET HAVRE || D'OOSTENDE, || ET DE CE QUE || MICHAEL FLORENCIO VAN LANGREN || *Cosmographe & Mathematicien de sa Majesté.* || A representé dez l'an 1627. pour rendre ladite Ville plus forte, & le Havre plus || commode, pour y pouvoir loger les Navires allans sur Mer, & par || consequent establir le Commerce universel en la Flandre, || au moyen de la Navigation; || *Veuë & approuvée par son Excellence* || DON FRANCISCO DE MELLO, || Par son Altesse le Serme Archiduc || LEOPOLDE GVILELME, || Par S. A. le Serme Prince || DON JVAN D'AVSTRICE, || Par S. A. le Serme Prince || DE CONDÉ, || Comme aussi maintenant par son Exe. le Marquis || de FROMISTA, Y CARACENA, || Gouverneur & Capitaine General des Païs-Bas, & de Bourgoigne, &c. || *Et par plusieurs Princes, Seigneurs, & Ingenieurs du Roy.* || A BRVXELLES, || chez PHILIPPE VLEUGART, Imprimeur juré. 1659.

Dit pamphlet bestaat uit 1 vel, 4 bladz. folio.

De titel vult de 1e bladz.; de 2e bevat het kaartje N°. 1 en het onderschrift; de 3e de kaartjes N°. 2 en N°. 3; de vierde de „Censure" en het „Verset".

[35]) Jean Leurechon werd omstreeks 1591 in Bar geboren, en stierf den 17 Januari 1670 te Pont-à-Mousson. Hij kwam in 1609 bij de Jezuiten en gaf onderwijs in de wiskunde; in 1625 werd hij Pastoor te Bar en later biechtvader van Karl III, hertog van Lotharingen. Hij was de schrijver der beroemde „Recreations Mathematiques", die later door Denis Henrion en Claude Mydorge werden bewerkt, en waarvan tot in 1680 herhaaldelijk herdrukken verschenen.

[36]) Description de Santvliet, la riviere Schelde et pays de Hulst, par Miguel Florencio van Langren, Cosmographe et Mathematicien de sa Majesté. Bruxelles. J. Mommaert. 1640. met een kaartje.

[37a]) Invention et Proposition que Michael Florencio van Langren, Cosmographe & Mathematicien de sa Majesté, a faict à Messieurs les Magistrats et Superintendent du Canal de ceste Royalle Ville de Bruxelles, pour empescher & prevenir les dommages & interests dont la basse Ville est actuellement fatiguée par le debordement de la Riviere de Senne. Censurée par quelques fameux Ingenieurs de sa Majesté. Bruxelles chez Juan Mommaert, à l'Imprimeur, M.D C.XLIV in 4°; waarop later volgde:

b) Eenighe Middelen om de Princelijcke stadt Brussel van de inondatien oft watervloet te bevryden. Door Michael Florencio van Langren, Cosmographe ende Mathematicien van Sijn Majesteyt. Brussel, Godfried Schoevaerts. 1648 in folio.

c) Michael Florencio van Langren, Cosmographe ende Mathematicien van Syne Majesteyt, sprekende aen d'Inwoonders van de Prinselycke stadt Brussel om de selve te verlossen van de jaerelyckschе overvloedt. 1 blad in folio.

[38]) Bij deze gelegenheid ondervond van Langren weder dergelijke tegenwerking, als bij zijn plannen voor de haven van Ostende. Reeds in 1638 deed hij voorstellen tot uitbreiding der stad Brussel aan den kant van het kanaal van Willebroeck, waar hij tevens werken wilde aanleggen tot beveiliging tegen overstrooming. Maar hier waren de Ingenieurs Jacques Franquart en zijn discipel P. Mercks, die tegen deze plannen opkwamen. Wel werden zij later ten deele uitgevoerd, maar geheel buiten hem om.

Deze Jacques Francquart (1577—1591) was een rijk architekt, die in Belgie den Italico-vlaamschen stijl invoerde, vele groote werken bouwde, en bij het hof zeer gezien was: hij werd door Filippo III tot ridder benoemd en was kamerheer van de Infante.

[39]) Gerard van Gutschoven, zoon van den avocaat der Hoogeschool te Leuven Guillaume van Gutschoven, en van Henriette van Eldem, werd den 6 Februari 1615 te Leuven geboren. Hij studeerde te Leuven en werd toen leerling van Descartes, dien hij hielp bij zijn proefnemingen en bij het overschrijven van zijne aanteekeningen: hij oefende zich tevens onder hem in de wiskunde en ontleedkunde, Henricus Reinerius, de groote vriend van Descartes, overleed den 16 Maart 1639 in zijn armen. Terugggekeerd te Leuven werd hij daar „licencié en médecine" den 2 September 1635. In dat zelfde jaar gaf hij een platten grond van Leuven uit, met betrekking tot het

doorgestane beleg (deze kaart bezit de Leidsche Bibliotheek), en werd belast met het herstellen van een gedeelte der bij het beleg verwoeste bolwerken. In 1640 volgde hij den Hoogleeraar Sturmius op in de leerschool der wiskunde en werd 23 April 1659 Hoogleeraar in anatomie, chirugie en plantkunde. Hij huwde 30 September 1638 Anna Leroy, die in September 1652 stierf; hij werd daarop geestelijke, in 1663 president van het College van Bruegel en in April 1665 Canonicus van de Cathedraal te Gend; doch hij overleed plotseling te Lierre den 4 Mei 1668.

[40]) APENDIX. Het moet gedrukt zijn in den zomer van 1660; zie § 8.

denkelijk A, B. 8 bladz. in folio, waarvan slechts de vier eerste bladzijden te Leiden aanwezig zijn.

[41]) Jean Charles della Faille werd den 1 Maart 1597 te Antwerpen geboren. Hoewel hij oudste zoon was van een rijk, adelijk geslacht, voegde hij zich 12 September 1613 bij de Jezuiten te Leuven, waar hij leerling werd van d'Aiguillon en Gregorius à St. Vincentio; in 1616 werd hij naar Dôle gezonden, waar hij wiskunde onderwees, en zooals later te Leuven, en in 1629 te Madrid, telkens grooten roem behaalde. In Spanje werd hij leermeester en tevens boezemvriend van Don Juan, dien hij bij alle oorlogstochten getrouw volgde. Deze verliet hem dan ook niet, toen hij te Barcelona door het verzorgen van zieken en gewonden ziek werd, en tien dagen later, den 4 November 1652 bezweek. Hij was gemengd in den strijd van Gregorius à St. Vincentio over de quadratuur van den cirkel, en voorkwam P. Guldin door zijn theorie over het zwaartepunt.

[42]) Ambrogio, Marquis de Spinola, zoon van Filippo de Spinola en eene dochter van den rijken prins Grimaldo van Salerne, werd geboren te Genua in 1569. Zelf zeer bemiddeld, bracht hij een leger van 9000 geoefende soldaten bijeen, waarmede hij in 1602 in Belgie verscheen, tot hulp van den koning van Spanje; zonder ooit zijn kosten vergoed te krijgen. Hij was de groote tegenstander van onzen Prins Maurits. In 1628 vertrok hij naar Spanje en werd naar Italie gezonden om Casal te belegeren, waarbij hij den 25 September 1630 overleed. Hij was gehuwd met Joanna Bacciadonna, die hem twee zonen schonk.

[43]) Over de „Nieuwe Maniere van Sterctebov door Spilsluysen" zie Bouwstoffen N°. XXV, en aldaar o. a. noot 27[a], 29[a].

[44]) Over Simon Stevin vergelijk de Bouwstoffen N°. XXI en XXV.

[45]) David le Leu de Wilhem werd 15 Mei 1588 te Hamburg geboren en overleed 27 Januari 1658. Hij was hier te lande in staatsdienst getreden en huwde 16 Januari 1633 met Constantia Huygens (2 Augustus 1602—1 December 1667). Zij was de jongste dochter van Christiaan Huygens en Susanna Hoefnagel, en dus de zuster van onzen Constantijn Huygens.

[46]) Chr. Huygens had in 1660 reeds uitgegeven:

a) CHRISTIANI HVGENII, CONST. F. || THEOREMATA || DE || QUADRATURA || HYPERBOLES, ELLIPSIS || ET CIRCULI; || EX DATO || PORTIONUM GRAVITATIS CENTRO. || *Quibus subjuncta est* || E'ξέτασις Cyclometriae Cl Viri GREGORII à S. VINCENTIO || editae Ano CIϽIϽCXLVII. || [Vignette: de boom met bijschrift NON SOLUS] || LVGD. BATAVOR. || Ex Officina ELSEVIRIANA. || ANNO CIϽIϽCLI in 4°.

[8] blz. AD LECTOREM.

A—F. 43 blz. met vele figuren; op blz. 25 begint de ΈΞΈΤΑΣΙΣ.

b) CHRISTIANI HUGENII, CONST. F. || DE || CIRCULI || MAGNITUDINE || INVENTA. || *ACCEDVNT EIVSDEM* || Problematum quorundam illustrium || Constructiones. || [Vignette als boven] || LVGDVNI BATAVORVM, || Apud JOHANNEM & DANIELEM ELSEVIER. || Academ. Typograph. || CIϽIϽCLIV in 4°.

[8] bladz. PRAEFATIO,

A—I, 71 blz. met vele figuren; op blz. 45 begint de PROBLEMATVM CONSTRVCTIONES.

c) CHRISTIANI HUGENII CONST. F. || AD || C. V. FRAN. XAVER. AINSCOM, S. I. ||

EPISTOLA, || Qua diluuntur ea quibus 'Ἐξέτασις Cyclometriae *Gregorij à Sto. Vin-||centio* impugnata fuit. || HAGAE-COMITUM, || Apud ADRIAUUM VLAQ || cIɔIɔcLVI in 4⁰.

A, B, 12 bladz.

d) CHR. HUGENII De Saturna Luna Observationes, 1656.

e) CHRISTIANI || HVGENII à ZVLICHEM, || CONST. F. || HOROLOGIUM. || [ornament]. || HAGAE-COMITVM. || Ex officina Adriani Vlacq. || M.DC.LVIII, in 4⁰.

[3] bladz. opdracht aan de Staten van Holland en West-Friesland.

A,B 15 blz. met 1 plaat

f) CHR. HUYGENS, Van rekeningh in spelen van Geluck. 1659.

Opgenomen in FR. VAN SCHOOTEN, Mathematische Oeffeningen; waarvan de Latijnsche vertaling

g) CHR. HUGENII De ratiociniis in ludo aleae. 1659.

opgenomen || in FR. VAN SCHOOTEN. Exercitationes Mathematicae.

h) CRISTIANI[sic] HVGENII || ZVLICHEMII, CONST. F. || SYSTEMA || SATVRNIVM, || *Sive* || De causis mirandorum SATVRNI || Phaenomenôn, || Et || Comite ejus || PLANETA NOVO. || [ornament] || HAGAE-COMITIS, || Ex Typographia ADRIANI VLACQ. || M.DC.LIX. in 4⁰.

[12] blz., opdracht van Prins LEOPOLDO AB HETRURIA (7 blz.) 2 verzen van N. HEINSIUS en CONST. HVGENIVS, C. F. (2 blz.); Errat. (1 blz.).

A—L, 84 blz. met vele figuren en tafels en 1 plaat.

[47]) CHRISTIANI HUGENII ZULICHEMII || BREVIS ASSERTIO || SYSTEMATIS || SATVRNII || SVI, || AD SERENISSIMUM PRINCIPEM || LEOPOLDUM AB HETRURIA. || [ornament] || *HAGAE-COMITIS* || Ex Typographia ADRIANI VLACQ, || ANNO DOMINI M.DC.LX. in 4⁰.

A—C, 20 bladz. met vele figuren.

[48]) COPIES DE LA VI. XI. ET XIII. LETTRE || QUE S. A. LE SERENISSIME PRINCE || D. JVAN D'AVSTRICHE || A ESCRIT DE SA ROYALE MAIN || *A Michel Florencio van Langren, Cosmographe & Mathe-||maticien de Sa Majesté.*

1 vel., 4 bladz. folio bevat, na drie extracten dezer brieven, een „AU LECTEUR." De datum is denkelijk 1668.

[49]) Dit geschrift heb ik te vergeefs getracht in handen te krijgen. De titel moet geweest zijn:

Apologia par les Ingenieurs . . . . contre van Langren. 1660.

[50]) Thomas François, Hertog (later prins) van Carignan (in Savoye), werd geboren in 1596 en stierf te Turin in 1656. Hij was een der negen kinderen van Charles Emanuel den Grooten van Savoye, werd Luitenant-Generaal, later Grootmeester van Frankrijk.

[51]) François Paul Baron de Lisola werd in 1613 te Salins geboren en overleed in het begin van 1675. Hij was eerst avocaat te Besançon, en werd aldaar in 1638 lid van den raad; het bleek echter, dat hij hierbij ongeoorloofde middelen gebezigd had, zoodat hij naar Duitschland moest vluchten. De Keizer zond hem in 1643 als ambassadeur naar Engeland, en later naar Polen, Spanje en Portugal. Volleerde diplomaat, spande hij al zijne krachten in tegen Frankrijk en schreef in 1667:

Bouclier d'Etat et de justice contre le dessin manifestement decouvert de la monarchie universelle, sous le vain pretexte des prétentions de la Reyne de France. 1667. in 12⁰.

DIALOGUE || SUR || LES DROITS || DE LA REYNE || TRES-CHRESTIENNE. || M.DC.LXVII. in 12⁰.

A—C. 68 blz. waarvan de eerste 6 ongepagineerd.

SUITE || DU || DIALOGVE || SUR LES DROITS || DE LA REYNE || TRES-CHRESTIENNE. || *NOUVELLE EDITION.* || *Reveüe, corrigée, & augmentée.* || M.D.C.LXVIII. in 12⁰.

[16] blz., L'IMPIMEUR (2 blz. SOMMAIRE (12 blz.).

A—O 335 blz.

Van het tweede stukje bestaat eene hollandsche vertaling:

SAMENSPRAAK || OVER || DE RECHTEN || der Aller-Christelijkste || KONINGIN || van VRANKRYK. || *Uit de Fransche in onse Taal getrou-||welijk overgezet.* || M.DC.LXVII. in 4⁰.

56 blz. (ongepagineerd).

[52]) Pieter Stockmans werd 3 September 1608 te Antwerpen geboren en overleed 7 Mei 1671 te Brussel. Te Leuven gepromoveerd in 1631, werd hij aldaar in 1632 Hoogleeraar in het grieksch en in 1633 in het burgerlijk recht. Hij huwde met eene rijke vrouw, die hem Heer van Lahuy en Pietrebois maakte. In 1643 werd hij Raadsheer van Brabant, in 1664 lid van den geheimen Raad. Hij streed tegen Lodewijk XIV voor de rechten van Brabant in zijn werk:

TRACTATUS || DE JURE || DEVOLUTIONIS: || AUTHORE || CLARIS. AC AMPLIS. VIRO. || D. PETRO STOCKMANS, J. V. D. || Olim in Academia Lovaniensi Legum Professore, || Nuper in Supremo Brabantiae Concilio, nunc in Sanctiore, Con-||siliario Regio, & Libellorum supplicum Magistro. || *Archivorum Brabanticorum Custode, Justitiae Militaris Supremo Praefecto.* || Nec non ad Comitia Imperialia titulo Circuli Burgumdici || Ablegato. || bruxellis, || Apud FRANCISCUM FOPPENS, sub signo S. Spiritus. || M.DC.LXVII. || *Cum Privilegio.*

A—Z. [29] blz. in 4°.

Waarvan de hollandsche vertaling

VERHANDELING || VAN 'T || VERSTERF-RECHT, || door den voortreffelijken Heer || Den Heer PIETER STOCKMANS, Rechts-geleerde. || *Voormaels in de Hooge School van Leuven Leeraer* || *der Wetten.* || Onlangs in den Hoogen, nu in den Geheimen Raed van Bra-||band Koninklijk Raedsheer, en Meester der Requesten. || *Bewaerder der Oude Geheug-schriften van Braband,* || *Opperste Richter van 't Krijgs-recht.* || En Afgesant op den Keiserlijken Rijksdach van wegen || den Bourgondischen Kreits. || *Uit het Latijn vertaelt.* || t' AMSTERDAM, || By JACOB VINCKEL, Boekverkooper in de Beursstraet, in de || History-schryver 1667. in 4°.

A—M. [6], 9, [9] blz.

[53]) Hugens de Lionne, Marquis van Berny, zoon van den wiskundige Artus de Lionne, werd in 1611 te Grenoble geboren en overleed te Parijs den 1 September 1671. In 1629 werd hij eerst commies bij zijn Oom Abel de Servien, directeur der financiën. Toen deze 1636 in ongenade viel, vertrok de Lionne naar Rome, waar hij het vertrouwen van Mazarin won. Onder diens leiding kreeg hij herhaaldelijk diplomatische zendingen, werd in 1643 Raadsheer, in 1646 Secretaris van de Regentes, in 1653 Grootmeester der Ceremonien van den Koning, in 1661 minister van buitenlandsche zaken.

[54]) Het geldt hier

Carlo II, zoon van den Koning Filippo IV en van Marianne Anne van Oostenrijk; hij werd geboren in 1661 en overleed 1 November 1700. Toen zijn vader in 1665 overleed, kwam hij onder regentschap, doch aanvaardde in 1676 de regeering; met hem eindigde de regeering uit het huis van Oostenrijk. Hij huwde in 1679 Maria Louisa van Orleans, die 1689 overleed, en later, in 1690, Maria Anna van de Pfalz.

[55]) Vergelijk hierover de kaart, met het onderschrift:

Korte Beschryvinge van de || XVII. NEDERLANTSCHE PROVINTIEN, || Vertoonende alle de gefortificeerde, bemuurde en open Steden, Schanssen, &c. daer in gesien || kan worden wat Plaetsen den Konink van Vrankrijk alrede verovert heeft. || t' AMSTERDAM, || Voor MARCUS WILLEMSZ. DOORNICK, Boekverkooper || op den Vygendam, in 't Kantoor Inktvat. 1667. in plano.

Dit onderschrift eindigt met een merkwaardige opgaaf, vooral in vergelijking met den tegenwoordigen toestand.

„De 17 Nederlantsche Provintien hebben te samen twee hondert twaelf Steden, zes duysend vijf hondert een-en-negentigh Dorpen: Hier || volght nu hoe veel Steden en Dorpen, yeder Provintie onder sigh || heeft."

Als voorbeeld dienen de volgende, waartegen de tegenwoordige toestand vergeleken wordt; men vergete daarbij echter niet, dat onderscheidene plattelands gemeenten uit een zeker aantal gehuchten of buurten bestaan.

Limburg,	5 Steden, 123 Dorpen,		5 Steden, 120 Gemeenten.
Gelderlandt en Zutphen,	22 Steden, 300 Dorpen.		15 Steden, 201 Gemeenten.
Hollandt,	29 Steden, 400 Dorpen.	N.-Holland.	13 Steden, 184 Gemeenten.
		Z.-Holland.	11 Steden, 186 Gemeenten.
Zeelandt,	9 Steden, 105 Dorpen.		9 Steden, 103 Gemeenten.
Utrecht,	5 Steden, 70 Dorpen.		6 Steden, 66 Gemeenten.
Vrieslandt,	11 Steden, 490 Dorpen.		11 Steden, 32 Gemeenten.
Overyssel,	11 Steden, 101 Dorpen.	Overijssel	3 Steden, 58 Gemeenten.
		Drenthe.	3 Steden, 30 Gemeenten.
Groeningen,	1 Stadt 145 Dorpen.		1 Stadt, 56 Gemeenten.

dit onderschrift behoort bij een kaartje:

NAEUKEURIGE AFTEYCKENING || Van de gelegentheijt der || XVII. NEDERLANTSCHE || PROVINCIEN || *Waer in de Bewalde, Bemuurde, Open Steden,* || *en Schanssen, etc. Yder Bijzonderlijck sijn afgebeelt.* || *Uytgegeven by Marcus Doornick, Boek-verkoper tot Amsterdam.* in plano.

Boven aan dit kaartje (het westen is boven) hangen de wapens der 17 Provincien.

[56]) In 1660 was Paus

Fabio Chigi, geboren 13 Februari 1599 te Sienna, en overleden 22 Mei 1661 te Rome. Hij was Nuntius bij de vrede te Munster 1648, werd Cardinaal-Minister en volgde den 7 April 1655 Innocentius X als Paus Alessandro VII op. Hij was een geleerde, en bracht veel toe aan de versiering van Rome.

[57]) Julio Rospigliosi, geboren te Pistoia in 1600, overleed te Rome 9 December 1669. Eerst auditeur van de Legatie te Parijs, naderhand Nuntius in Spanje, werd hij Kardinaal en 20 Juni 1667 Paus Clemens IX, dezelfde die op blz. 37 genoemd werd. Hij herstelde de goede verstandhouding met Frankrijk.

[58]) Alexandre Hertog van Bournonville, zoon van Dodart de Bournonville, Baron van Capres, Barlin en Houllefort en van Maria Christina van Egmond, Hofdame van Marguerita van Parma, werd 4 November 1585 geboren en overleed in ballingschap 22 Maart 1666. Op 15 jarigen leeftijd door Henri IV tot Hertog en Pair van Frankrijk verheven, reisde hij veel, werd opgenomen in het Spaansche leger, en bewees naderhand vele diensten als afgezant. In 1662 werd hij ridder van het gulden vlies. Hij huwde met Anna de Melun.

[59]) Hier is bedoeld:

Jean Gaspard Ferdinand Graaf van Marchin, overleden te Spa in 1673. Hij behoorde tot den Duitschen adel; strijdende onder den Hertog van Enghien (later Condé), werd bij Kolonel-Generaal van de lichte cavallerie, in 1648 Marechal de camp. Vervolgens diende hij dan eens in het Fransche leger, dan weder onder den Hertog van Condé In 1658 werd hij ridder van den Kouseband, en Graaf du Saint Empire.

[60]) Denkelijk een zoon van Don Pedro de Salasar de Mendoza, die in 1550 te Toledo geboren werd, waar hij in 1629 overleed.

[61]) Aende Edele, Wijse ende voorsienighe Heeren, mijne Heeren den Amptman, Borghemeester, Schepenen, Stedeniers ende Raedt van de Princelycke Stadt Brussel. Het is een ieder bekendt dat Michael Florentio van Langren, Cosmographe ende Mathematicus van sijn Majesteyt, hem over meer als 40 jaeren met alle naerstighheydt ende ijver gheemployeert heeft om te vermeerderen verscheyde diensten van den Koninck in de saken van zijn studie.

2 blz. in folio plano. Met een kaart van het kanaal Brussel—Vilvoorde, verlengd tot aan Mechelen: genaamd „Canal de Moura". (naar een der titels, Marquis de Moura, van den Gouverneur Generaal Marquis de Castel Rodrigo).

Daarbij behoort het pamflet

Van Langren Cosmographe de sa Majesté demonstre en cette Carte le Canal que Messieurs du Magistrat de Bruxelles ont commencé le 19 Juin. de l'an 1550, & achevé

en celuy de 1561 [dit is het Kanaal van Brussel naar Vilvoorde]. On y voit de mesmes le Canal qu'il a representé à Messieurs du Magistrat de Malines, par lequel on pourra à petits frais naviger par deux barques en trois heures & demy ou en quatre heures d'une ville à l'autre.

62) Vergelijk het werkje:

Eenighe Middelen om de Princelijcke Stadt Brussel van de inondatie oft watervloedt te bevrijden. Brussel. Godefroid Schoovaerts. 1648 in folio.

63) Zie het werkje:

Michael Florencio van Langren, Bewijs van de alderbequaemste en profitelyckste inventie om de overtreffelycke ende vermaerde koopstad van Antwerpen te verlossen van de pestighe ende ongesonde locht, komende uyt de vuyle, verrotten en stinkende royen. Brussel. S. Scheybels. 1661. in 4⁰.

64) Dit Rapport van van Langren aan den Graaf de Monte Rey bevat 8 bladz. folio, waarvan de eerste zes gepagineerd. Op blz. [7] komt het kaartje No. V voor: het achtste is wit.

65) De graaf de Monte Rey kwam in Juni 1670 als gouverneur der Spaansche Nederlanden te Brussel.

66) Alexandro Farnese, Hertog van Parma, was de zoon van Octavio Farnese, Hertog van Parma en van Margaretha van Oostenrijk; hij werd 1516 geboren en stierf 3 December 1592. Depper krijgsoverste, streed hij tegen de Noord-Nederlanders. Hij huwde met Maria van Portugal.

67) Don Alonso de Zepeda y Adada was Kapitein en Adjudant van den Gouverneur Benavides.

68) De „Connestable de Castilles" was Don Inigo Melchior Fernandes de Velasco y Jouar, hij was, als opvolger van Castel Rodrigo, Gouverneur der Spaansche Nederlanden van September 1668 tot Juni 1670.

69) Don Antonio de Pimentel was buitengewoon gezant van Spanje te Stockholm, waar hij op Koningin Christine grooten invloed uitoefende.

70) COPIA De un Papel || que escribiò el Capitan Don || ALONSO DE ZEPEDA Y ADRADA || „AYUDANTE DE SERGENTO GENERAL || DE BATTALLA, || Por Ordeu de su Ex^e^: el Señor || „MARQVES DE FROMISTA || Y CARACENA, &c || SOBRE EL REMEDIO DE EL PUERTO || DE „OSTENDE. || Y assi mismo de una Carta que escribiò à el S^R^. VAN LANGREN, Cosmo-„grapho de su Mag^d^. || En que Responde à la Apologia que hau escrito contra èl „algunos || Emulos suyos.

B—E 10 blad in folio gedateerd Ostende a 15 de Julio 1660.

71) RESPUESTA || De el Capitan Don Alonso de Zepeda Ayudante de || Sargento „General de Batalla, à un Billete que le es-||crivio el Sr. van Langren sobre la Invectiva „que sus || Emulos havian escripto contra èl, sobre los remedios || propuestos para el „Puerto de Ostende, en que || tambien responde à los punctos de la dicha Inve-||ctiva.

„A—C 14 bladz. in folio gedateerd Brusselas à 16. de Septiembre de 1660.

en celuy de 1561 [dit is het Kanaal van Brussel naar Vilvoorde]. On y voit de mesmes le Canal qu'il a representé à Messieurs du Magistrat de Malines, par lequel on pourra à petits frais naviger par deux barques en trois heures & demy ou en quatre heures d'une ville à l'autre.

62) Vergelijk het werkje:

Eenighe Middelen om de Princelijcke Stadt Brussel van de inondatie oft watervloedt te bevrijden. Brussel. Godefroid Schoovaerts. 1648 in folio.

63) Zie het werkje:

Michael Florencio van Langren, Bewijs van de alderbequaemste en profitelyckste inventie om de overtreffelycke ende vermaerde koopstad van Antwerpen te verlossen van de pestighe ende ongesonde locht, komende uyt de vuyle, verrotten en stinkende royen. Brussel. S. Scheybels. 1661. in 4°.

64) Dit Rapport van van Langren aan den Graaf de Monte Rey bevat 8 bladz. folio, waarvan de eerste zes gepagineerd. Op blz. [7] komt het kaartje No. V voor: het achtste is wit.

65) De graaf de Monte Rey kwam in Juni 1670 als gouverneur der Spaansche Nederlanden te Brussel.

66) Alexandro Farnese, Hertog van Parma, was de zoon van Octavio Farnese, Hertog van Parma en van Margaretha van Oostenrijk; hij werd 1516 geboren en stierf 3 December 1592. Dapper krijgsoverste, streed hij tegen de Noord-Nederlanders. Hij huwde met Maria van Portugal.

67) Don Alonso de Zepeda y Adada was Kapitein en Adjudant van den Gouverneur Benavides.

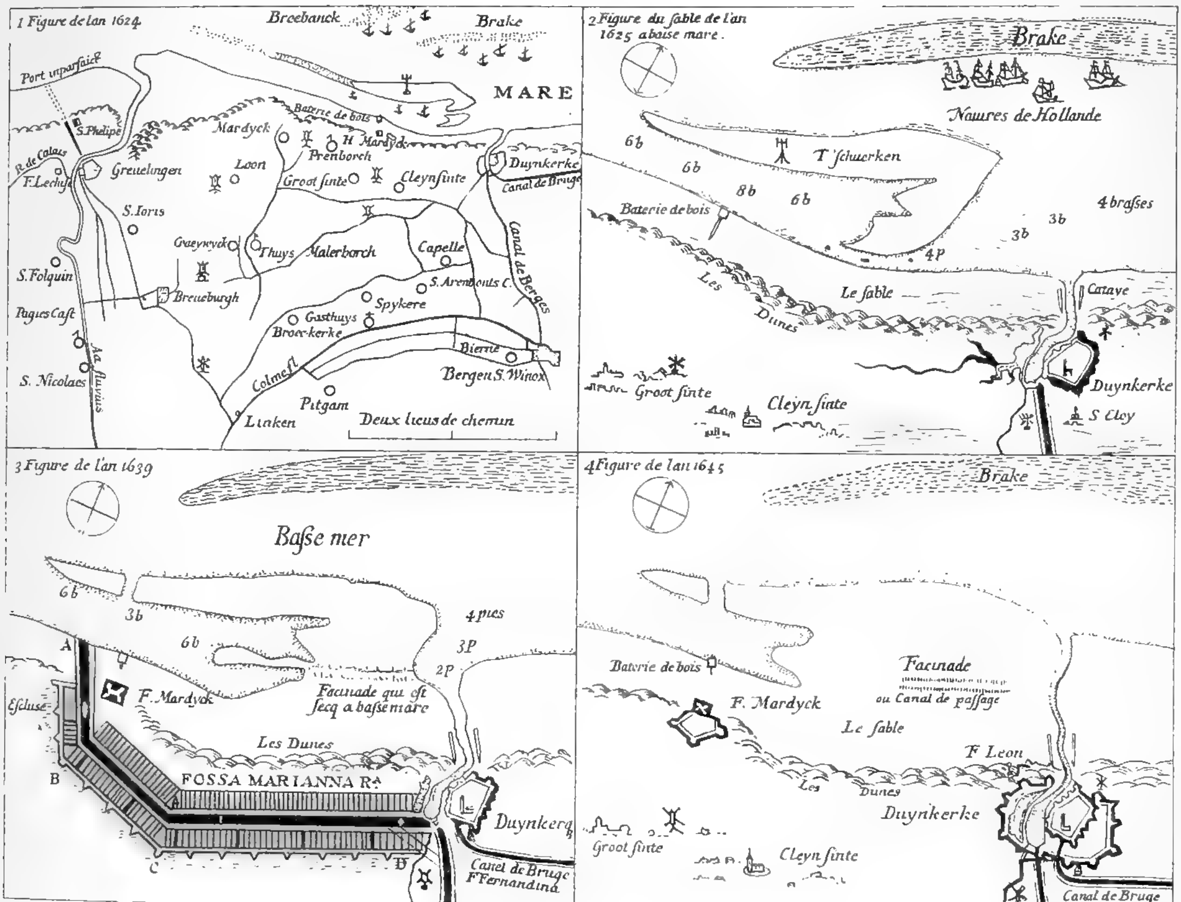
68) De „Connestable de Castilles" was Don Inigo Melchior Fernandes de Velasco y Jouar, hij was, als opvolger van Castel Rodrigo, Gouverneur der Spaansche Nederlanden van September 1668 tot Juni 1670.

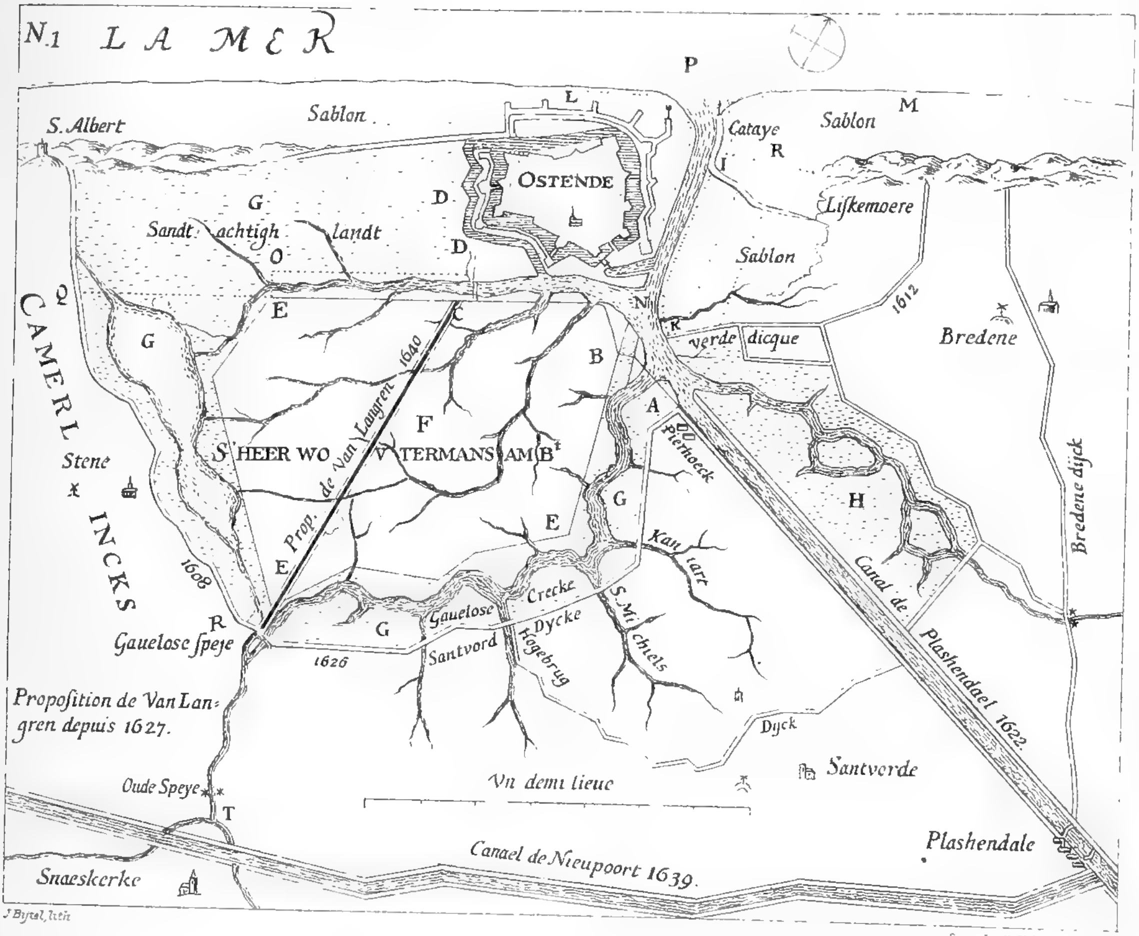
69) Don Antonio de Pimentel was buitengewoon gezant van Spanje te Stockholm, waar hij op Koningin Christine grooten invloed uitoefende.

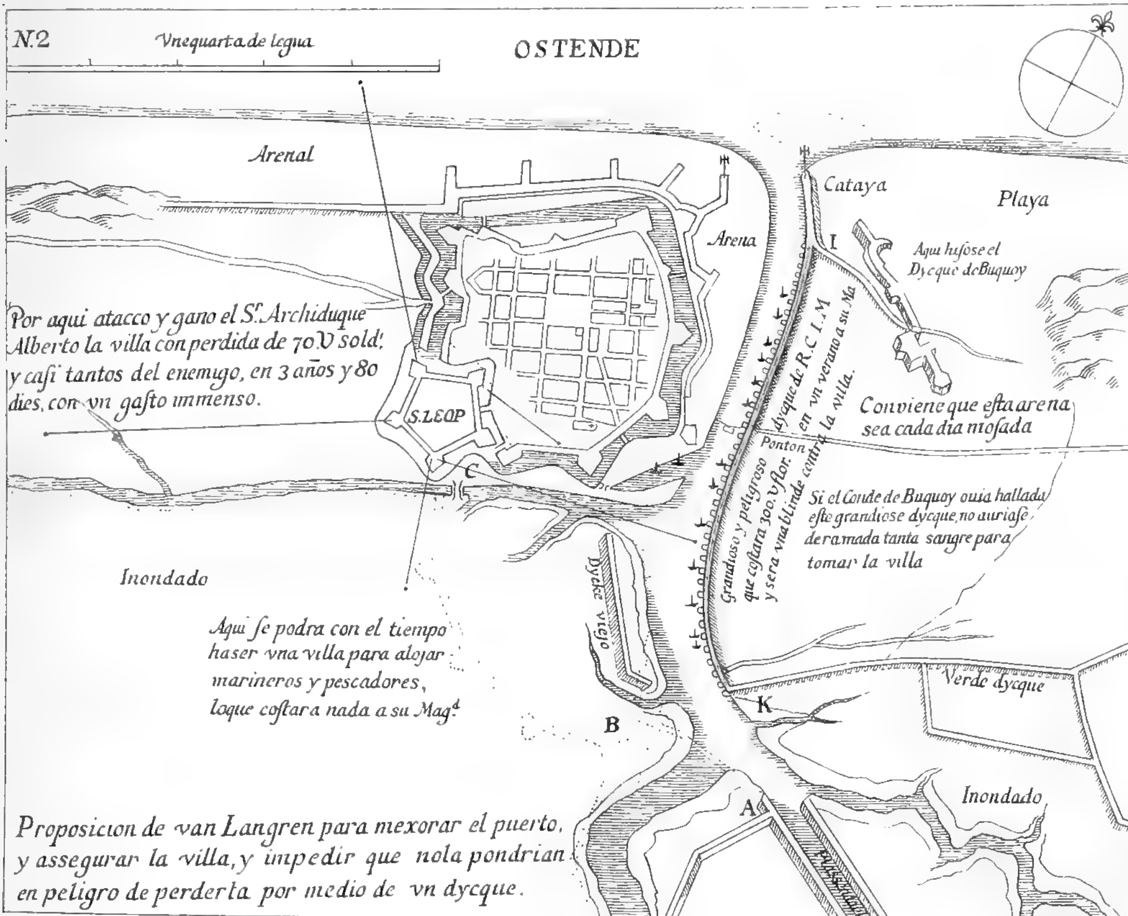
70) COPIA De un Papel || que escribiò el Capitan Don || ALONSO DE ZEPEDA Y ADRADA || „AYUDANTE DE SERGENTO GENERAL || DE BATTALLA, || Por Ordeu de su Ex^{a}: el Señor || „MARQVES DE FROMISTA || Y CARACENA, &c || SOBRE EL REMEDIO DE EL PUERTO || DE „OSTENDE. || Y assi mismo de una Carta que escribiò à el S^{R}. VAN LANGREN, Cosmo-„grapho de su Mag^{d}. || En que Responde à la Apologia que hau escrito contra èl „algunos || Emulos suyos.

B—E 10 blad in folio gedateerd Ostende a 15 de Julio 1660.

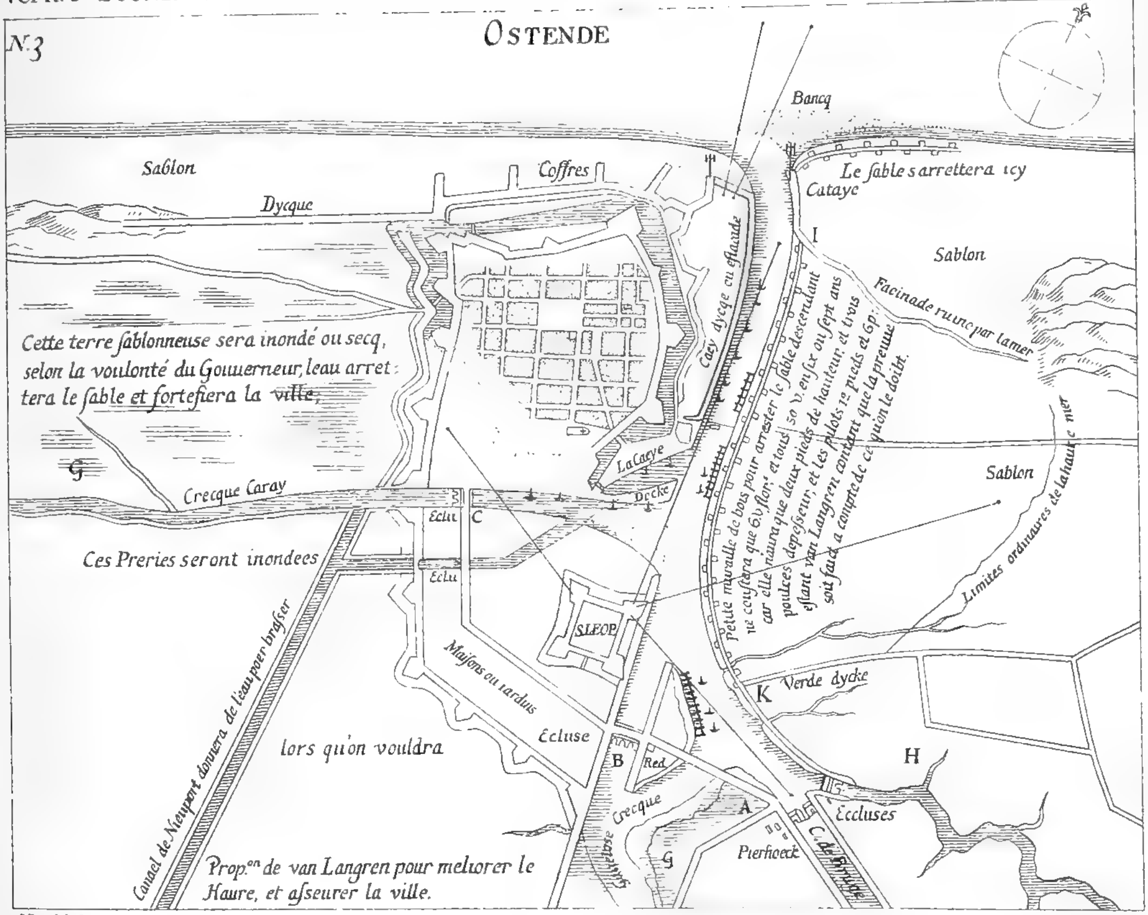
71) RESPUESTA || De el Capitan Don Alonso de Zepeda Ayudante de || Sargento „General de Batalla, à un Billete que le es-||crivio el Sr. van Langren sobre la Invectiva „que sus || Emulos havian escripto contra èl, sobre los remedios || propuestos para el „Puerto de Ostende, en que || tambien responde à los punctos de la dicha Inve-||ctiva. „A—C 14 bladz. in folio gedateerd Brusselas à 16. de Septiembre de 1660.


1 Figure de l'an 1624
Breebanck
Brake
MARE
Port imparfaict
S. Phelipe
R. de Calais
F. Lecluse
Greuelingen
Baterie de bois
Mardyck
H. Mardyck
Prenborch
Loon
Groot finte
Cleynfinte
Duynkerke
Canal de Bruge
S. Ioris
Gaeyweyck
Thuys
Malerborch
Capelle
Canal de Berges
S. Folquin
Breuburgh
S. Arenbouts C.
Spykere
Pagues Cast
Gasthuys
Broec-kerke
Aa fluvius
Bierne
S. Nicolaes
Colmesl
Bergen S. Winox
Pitgam
Deux lieus de chemin
Linken
2 Figure du sable de l'an 1625 a basse mare.
Brake
Navires de Hollande
T'Schuerken
6b
8b
4 brasses
3b
Baterie de bois
4P
Les Dunes
Le sable
Catave
Duynkerke
Groot finte
Cleyn finte
S. Eloy
3 Figure de l'an 1639
Basse mer
6b
3b
4 pies
3P
2P
A
F. Mardyck
Esclusе
Facinade qui est secq a basse mare
Les Dunes
B
FOSSA MARIANNA Ra.
Duynkerq
C
D
Canal de Bruge
F. Fernandina
4 Figure de l'an 1645
Brake
Baterie de bois
Facinade
F. Mardyck
ou Canal de passage
Le sable
F. Leon
Les Dunes
Duynkerke
Groot finte
Cleyn finte
Canal de Bruge


N.1 LA MER
P
L
S. Albert
Sablon
OSTENDE
Cataye
Sablon
M
R
Lifkemoere
G
D
Sandt achtigh landt
O
D
Sablon
Q
CAMERLINCKS
E
C
N
K
verde dicque
1612
Bredene
G
B
A
Pierhoeck
F
S'HEER WOUTERMANS AMBt
Prop. de Van Langren 1640
Stene
G
H
Bredene dijck
E
Kant aart
E
1608
Crecke
Gauelose Dycke
S. Michiels
Canal de Plashendael 1622
R
Gauelose speje
G
Santvord
Hogebrug
1626
Propofition de Van Langren depuis 1627.
Dyck
Santverde
Un demi lieue
Oude Speye
T
Canael de Nieupoort 1639.
Plashendale
Snaeskerke
J. Bytel, lith.

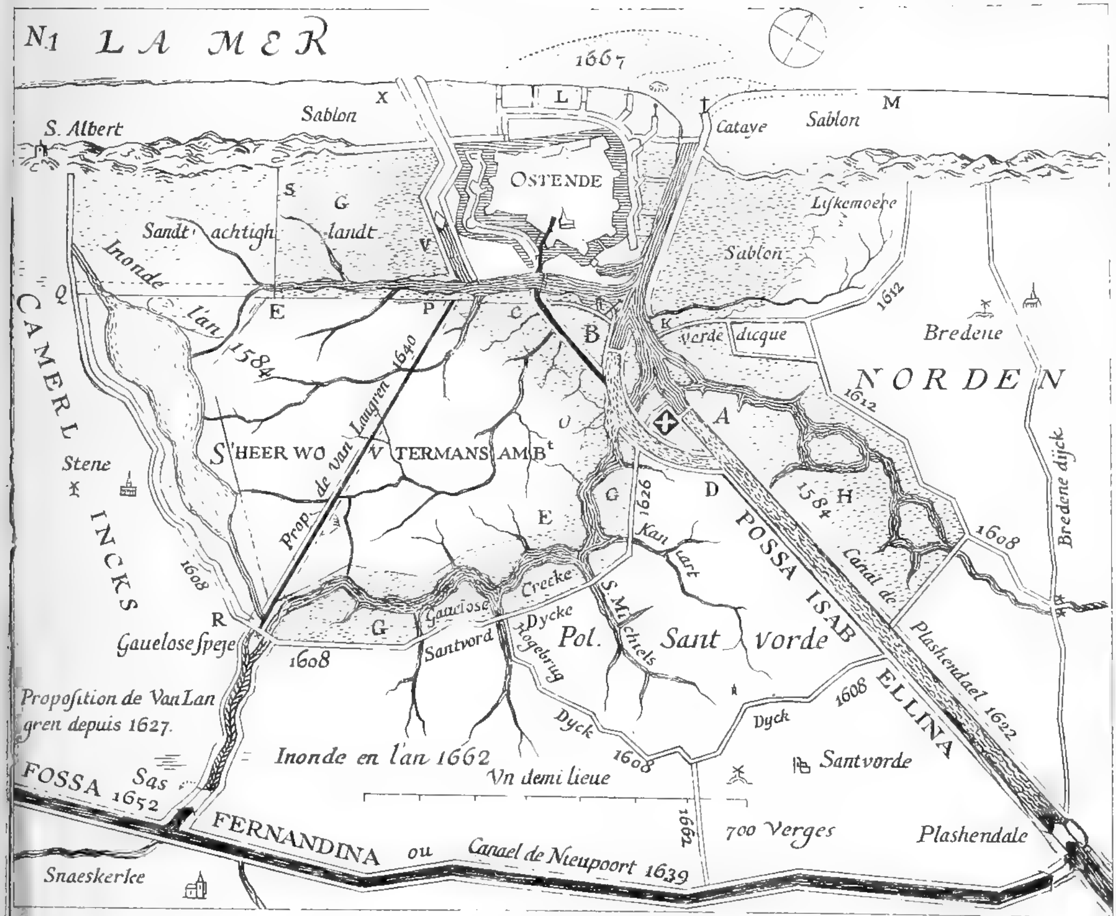

N.2
Vnequarta de legua
OSTENDE
Arenal
Arena
Cataya
Playa
I
Aqui hisose el Dycque de Buquoy
Por aqui atacco y gano el Sr. Archiduque Alberto la villa con perdida de 70.V sold. y casi tantos del enemigo, en 3 años y 80 dies, con vn gasto immenso.
S.LEOP
C
Conviene que esta arena sea cada dia mosada
Ponton
Grandioso y peligroso dycque de R.C.I.M. que costara 300.V flor. en vn verano a su Ma y sera vna blinde contra la villa.
Si el Conde de Buquoy ouia hallada este grandiose dycque, no auriase deramada tanta sangre para tomar la villa
Inondado
Dycke viejo
Aqui se podra con el tiempo haser vna villa para alojar marineros y pescadores, loque costara nada a su Magd.
B
K
Verde dycque
A
Inondado
Proposicion de van Langren para mexorar el puerto, y assegurar la villa, y impedir que nola pondrian en peligro de perderla por medio de vn dycque.

J.Butel, lith.



J. Bytel, lith.

Steendr. P. J. Mulder, Leiden



H. Bytel, lith. Steendr. P. J. Mulder Leiden

BOEKDRUKKERIJ
De Roever Kröber-Bakels.
AMSTERDAM.

REGELMÄSSIGE

SCHNITTE UND PROJECTIONEN

des Achtzelles, Sechszehnzelles und Vierundzwanzigzelles

IM

VIERDIMENSIONALEN RAUME.

VON

P. H. SCHOUTE.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

(DEEL II. N°. 2 en 4.)

(MIT ZWEI TAFELN.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1894.

REGELMÄSSIGE
Schnitte und Projectionen
DES ACHTZELLES UND DES SECHSZEHNZELLES

IM

VIERDIMENSIONALEN RAUME.

VON

P. H. SCHOUTE.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

DEEL II. N°. 2.

(MIT EINER TAFEL.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER
1894.

REGELMÄSSIGE

SCHNITTE UND PROJECTIONEN

DES ACHTZELLES UND DES SECHSZEHNZELLES

IM VIERDIMENSIONALEN RAUME.

VON

P. H. SCHOUTE.

I. Schnitte vom Achtzelle Z^8_a.

1. Man erhält eine Abbildung von Z^3_a auf den dreidimensionalen Raum, wenn man einen Würfel in zwei parallelen Lagen annimmt und die entsprechenden Eckpunkte verbindet. Hiervon liefert Fig. 1 eine zweidimensionale Andeutung.

Wir betrachten nun zunächst den Schnitt von Z^8_a (Seitenlänge $= a$) mit dem dreidimensionalen Raume R_3, welcher im Mittelpunkte O der Zelldiagonale AB auf dieser Geraden senkrecht steht und also den Ort des Punktes bildet, der von A und B gleich weit entfernt ist. Dieser R_3 muss die von Seiten weder mit A noch mit B verbundenen Ecken P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 aufnehmen, weil diese Punkte von A und B die gleiche Entfernung $a\sqrt{2}$ haben. Da diese Punkte von A die nämliche Entfernung $a\sqrt{2}$ haben, liegen sie auf dem Schnitte von R_3 mit der Hypersphere von Centrum und Radius A und $a\sqrt{2}$, d. h. auf der Kugel von Centrum und Radius O und a. Oder, was schneller zum Ziele führt, es ist $P_1 P_2 P_3$ ein gleichseitiges Dreieck, welches man erhält, wenn man vom Würfel mit der Körperdiagonale AC die andern Eckpunkte der in C zusammenstossenden Kanten verbindet. So findet man, dass die sechs genannten Punkte die Eckpunkte sind von acht gleichseitigen Dreiecken, welche in den vier Paaren von parallelen Ebenen liegen, die R_3 mit den vier Paaren von begrenzenden Würfeln gemein hat. Deshalb schliessen diese Dreiecke, wie die Figur auch deutlich erkennen lässt, ein regelmässiges Octaeder von der Seitenlänge $a\sqrt{2}$ ein. Also hat man:

„Der Schnitt des Z^8_a mit dem Mittelraume senkrecht auf einer Zelldiagonale ist ein Octaeder $O_{a\sqrt{2}}$".

B 1

Verhand. Kon. Akad. v. Wetensch. (1e Sectie). Dl. II.

„Bei paralleler Verschiebung des Schnittraumes R_3 geht das Octaeder in die Combination von zwei centrischen nicht gleich stark entwickelten entgegengesetzten Tetraedern (Fig. 2) über*)".

Dieser Satz bildet die Ausdehnung des bekannten Satzes, welcher aussagt, wie ein Würfel von einer Ebene senkrecht zu einer Körperdiagonale geschnitten wird.

2. Wir betrachten weiter den Schnitt von Z_a^8 mit dem dreidimensionalen Raume R'_3, welcher im Mittelpunkte O der ersten Querlinie $A'B'$ (Fig. 3) durch die Mitten von zwei gegenüberstehenden Seiten auf dieser Geraden senkrecht steht. Da die Körperdiagonalen $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ eines Paares von parallelen Würfeln mit $A'B'$ parallel laufen und auf $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ senkrecht stehen, werden sie ebenfalls vom Raume R'_3 senkrecht halbiert. Dem bekannten Satze des Würfelschnittes nach, begegnet R'_3 diese beiden Würfel in gleichen regelmässigen Sechsecken, die in parallelen Ebenen liegen. Weil $A_1 A_2$ dem Schnittraume R'_3 parallel ist, begegnet diese die sechs andern begrenzenden Würfel in gleichen Rechtecken (mit den Seitenlängen a und $\frac{1}{2} a\sqrt{2}$). Und es leuchtet jedenfalls auch ein, dass die Mitten $P_1, P_2 \ldots Q_6$ der zwölf Seiten, welche weder mit $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ parallel sind, noch diese Seiten schneiden, von A' und B' die gleiche Entfernung $\frac{1}{2} a\sqrt{6}$ haben. Man hat also:

„Der Schnitt des Z_a^8 mit dem Mittelraume senkrecht auf einer ersten Querlinie ist ein regelmässiges sechsseitiges Prisma $P_{\frac{1}{2} a\sqrt{2}, a}$".

„Bei paralleler Verschiebung des Schnittraumes geht $P_{\frac{1}{2} a\sqrt{2}, a}$ in die Combination von zwei centrischen nicht gleich stark entwickelten regelmässigen dreiseitigen Prismen (Fig. 4) über†)".

3. Es ist nicht notwendig die übrigen noch einfacheren Fälle näher zu erörtern. Deshalb geben wir nur die Resultate:

„Der Schnitt des Z_a^8 mit dem Mittelraume senkrecht auf einer zweiten Querlinie $A''B''$ (Fig. 5) ist ein rechtwinkliges Parallelopiped $P_{a, a, a\sqrt{2}}$".

„Bei paralleler Verschiebung ändert sich die Dimension $a\sqrt{2}$".

„Der Schnitt des Z_a^8 mit einem Raume parallel zu zwei begrenzenden Würfeln ist ein Würfel W_a".

4. Wir reihen hier einige Andeutungen über den Schnitt mit einem willkürlich gewählten Mittelraume an. Er ist immer von

*) Hier ist nur die *Form* und nicht die *Grösse* der Combination in Vergleichung mit der *Grösse* des Octaeders richtig angegeben. Denn bei paralleler Verschiebung des Schnittraumes ändert sich der Abstand der parallelen Seitenflächen nicht.

†) Man sehe die erste Fussnote.

Paaren paralleler Ebenen eingeschlossen, hat O zum Centrum und ist in Bezug auf O radial-symetrisch. Es sind also die gegenüberliegenden Seitenflächen einander entgegengesetzt-congruente Sechs-, Fünf-, Vier- oder Dreiecke. Und bei paralleler Verschiebung verliert der Schnittkörper die centralen Eigenschaften, können sogar einige Seitenflächen verschwinden. Weiteres würde uns in die Tetragoniometrie führen.

II. Projectionen vom Achtzell Z^8_a.

5. Wir projicieren zunächst das Z^8_a in der Richtung AB (Fig. 1) auf den oben benutzten Schnittraum R_3. Dabei wird dann jedes der beiden Quadrupel von entweder in A oder in B zusammentretenden Würfeln die nämliche Projection liefern und die diesen Körper einschliessenden Seitenflächen von den weder durch A noch durch B gehenden zwölf Seitenflächen von Z^8_a herrühren. Von jedem schiefen Parallelopipede, das die Projection eines der acht begrenzenden Würfel von Z^8_a bildet, stossen dann drei Seitenflächen in O zusammen, indem die drei übrigen zur Begrenzung gehören. Da das Z^8_a im ganzen sechszehn Eckpunkte hat und A und B sich im Centrum O projicieren, wird die Begrenzung vierzehn Eckpunkte zählen. Diese vierzehn Punkte sind verschiedener Art. Erstens giebt es sechs Punkte, die ihre eigene Projection sind, die Eckpunkte des Octaeders $O_{a\sqrt{2}}$. Zweitens rühren acht Punkte von den Ecken her, die entweder mit A oder mit B verbunden sind. Wir unterdrücken den einfachen Beweis, dass die Projectionen dieser acht Punkte die Eckpunkte eines Würfels W_a sind. Ist dieser Beweis gegeben, so findet man:

„Die senkrechte Projection des Z^8_a in der Richtung einer Zelldiagonale ist ein Rhombendodekaeder $R_{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}$."

Zeichnet man in der Abbildung des Rhombendodekaeders die vier Würfeldiagonalen hinein (Fig. 6) und bringt man die von diesen Geraden zu je zweien bestimmten Ebenen an, so leuchtet es wirklich ein, dass dieser Körper auf zwei verschiedene Weisen die Summe von vier gleichen schiefen Parallelopipeden ist.

6. Die parallelen dreidimensionalen Räume, welche die Würfel A_1B_1 und A_2B_2 (Fig. 3) enthalten, stehen senkrecht auf den Strecken A_1A_2 und B_1B_2, welche dem oben benutzten Mittelraume R'_3 parallel sind. Wenn wir das Z^8_a in der Richtung $A'B'$ auf diesen Raum R'_3 projicieren, sind die Projectionen der beiden genannten Würfel also ebene Figuren; für jeden dieser beiden Würfel spielt die

Operation des Projicierens ganz in seinem eigenen Raume, d. h. auf die Schnittebene seines Raumes mit R'_3 ab. Da die beiden Schnittebenen die Körperdiagonalen A_1B_1 und A_2B_2 senkrecht halbieren, sind die beiden Projectionen, einem zweiten bekannten Satze vom Würfel nach, zwei gleiche regelmässige Sechsecke $S_{\frac{1}{3}a\sqrt{6}}$. Weiter projicieren sich die sechs übrigen Würfel als gleiche Parallelopipede mit einer gemeinschaftlichen Seite O_1O_2. Deshalb findet man:

„Die senkrechte Projection des Z_a^8 in der Richtung einer ersten Querlinie ist ein regelmässiges sechsseitiges Prisma $P_{\frac{1}{3}a\sqrt{6}, a}$."

7. Von den übrigen noch einfacheren Fällen geben wir nur die Resultate.

„Die senkrechte Projection des Z_a^8 in der Richtung einer zweiten Querlinie ist ein rechtwinkliges Parallelopided $P_{a, a, a\sqrt{2}}$."

„Die senkrechte Projection des Z_a^8 auf einen Raum, der mit zwei der acht begrenzenden Würfel parallel läuft, ist ein Würfel W_a."

8. Die allgemeinste senkrechte Projection des Z_a^8 ist ein Körper mit höchstens sechs Paaren parallelen Seitenflächen und 16 Eckpunkten. Sie hat einen Mittelpunkt und ist in Bezug auf diesen radial-symetrisch.

III. Analytische Ableitung der gewonnenen Resultate.

9. Nimmt man die vier dreidimensionalen Räume durch O parallel zu den Paaren von begrenzenden Würfeln zu Coordinatenräumen an, so erhält man die einfachste Coordinatenstellung des Z_a^8. Dabei sind die Coordinaten der 16 Eckpunkte durch die Gleichungen

$$2x_1 = \pm a\,,\ 2x_2 = \pm a\,,\ 2x_3 = \pm a\,, 2x_4 = \pm a\,,$$

wo man alle Zeichencombinationen zu betrachten hat, gegeben. Mittels der orthogonalen Transformation

$$\left.\begin{aligned} 2y_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2y_2 &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ 2y_3 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 2y_4 &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

wird das Z_a^8 senkrecht auf seine Zelldiagonale gestellt. Mit der Abkürzung b für $-a$ findet man bei jeder Zeichencombination die Werte der doppelten Coordinaten $2y_1$, $2y_2$, $2y_3$, $2y_4$ angegeben.

$++++$	$2a, 0, 0, 0$	$++--$	$0, 2a, 0, 0$	$---+$	b, b, b, a
		$+-+-$	$0, 0, 2a, 0$	$--+-$	b, b, a, b
$-+++$	b, a, a, a	$+--+$	$0, 0, 0, 2a$	$-+--$	b, a, b, b
$+-++$	a, b, a, a	$-++-$	$0, 0, 0, 2b$	$+---$	a, b, b, b
$++-+$	a, a, b, a	$-+-+$	$0, 0, 2b, 0$		
$+++-$	a, a, a, b	$--++$	$0, 2b, 0, 0$	$----$	$2b, 0, 0, 0$

In diesem Schema sind die sechs Punkte des mittleren Teiles die Schnittpunkte mit dem Raume $y_1 = 0$, die wir als die Ecke des Octaeders $O_{a\sqrt{2}}$ erkannt haben. Und indem der erste und der letzte Punkt sich auf $y_1 = 0$ in O projicieren, bilden die gleichartigen Projectionen der 8 Punkte, deren Coordinaten eine ungerade Zahl von Minuszeichen zeigen, die Ecke des Würfels W_a.

10. Es ist im Systeme der x der Punkt $x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{2} a$ der Mittelpunkt einer Seite (A' in Fig. 3) und deshalb ist auch $x_2 + x_3 + x_4 = 0$ die Gleichung des Mittelraumes senkrecht auf OA'. Mittels der Transformation

$$\left.\begin{aligned} z_1\sqrt{3} &= \phantom{-x_1 - x_2 +{}} x_2 + x_3 + x_4 \\ z_2\sqrt{3} &= -x_1 \phantom{{}+x_2} - x_3 + x_4 \\ z_3\sqrt{3} &= -x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} - x_4 \\ z_4\sqrt{3} &= -x_1 - x_2 + x_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

stellen wir Z_a^8 also senkrecht auf seine erste Querlinie. Mit der Abkürzung $c = -d = \frac{1}{3} a\sqrt{3}$ finden wir in nämlicher Reihenfolge das Coordinatenschema

$3c, d, d, d$	$d, d, c, 3d$	$d, 3c, d, c$
	$d, 3d, d, c$	$d, d, c, 3c$
$3c, c, c, c$	$d, c, 3d, d$	$d, c, 3c, d$
$c, d, 3d, c$	$c, d, 3c, c$	$3d, d, d, d$
$c, c, d, 3d$	$c, 3c, c, d$	
$c, 3d, c, d$	$c, c, d, 3c$	$3d, c, c, c$

Dieses Schema zeigt, dass die Projection auf $z_1 = 0$ ausser den doppelt zählenden Punkten (c, c, c) und (d, d, d) die zwölf Punkte

$3c, c, d$	$c, 3c, d$	$c, d, 3c$
$3c, d, c$	$d, 3c, c$	$d, c, 3c$
$3d, c, d$	$c, 3d, d$	$c, d, 3d$
$3d, d, c$	$d, 3d, c$	$d, c, 3d$

enthält. Mit den Punkten

$3c, c, c$	$c, 3c, c$	$c, c, 3c$
$3c, d, d$	$d, 3c, d$	$d, d, 3c$
$3d, c, c$	$c, 3d, c,$	$c, c, 3d$
$3d, d, d$	$d, 3d, d$	$d, d, 3d$

bilden sie die 24 convexen Ecken des von sieben Würfeln gebildeten Kreuzes mit drei Armen (Fig. 7). An und für sich bilden sie die Eckpunkte eines regelmässigen sechsseitigen Prismas.

Zur Untersuchung des Schnittes mit dem Raume $z_1 = 0$, bedienen wir uns von den Umkehrungen der Formeln 2). Diese zeigen, dass die acht begrenzenden Räume den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{rl} z_2 + z_3 + z_4 &= \pm a\sqrt{3} \\ -z_1 \qquad - z_3 + z_4 &= \pm a\sqrt{3} \\ -z_1 + z_2 \qquad - z_4 &= \pm a\sqrt{3} \\ -z_1 - z_2 + z_3 \qquad &= \pm a\sqrt{3} \end{array}\right\}$$

entsprechen und diese also mit dem Raume $z_1 = 0$ die Ebenen

$$\left.\begin{array}{rl} z_2 + z_3 + z_4 &= \pm a\sqrt{3} \\ - z_3 + z_4 &= \pm a\sqrt{3} \\ z_2 \qquad - z_4 &= \pm a\sqrt{3} \\ - z_2 + z_3 \qquad &= \pm a\sqrt{3} \end{array}\right\}$$

gemein haben. Wie eine Zeichnung (Fig. 8) andeutet, bildet das erste Paar Ebenen die Grundebenen eines regelmässigen sechsseitigen Prismas, von welchem die drei andern Paare die Seitenflächen ausmachen.

11. Es ist im Systeme der x der Punkt $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}a$, $x_3 = x_4 = 0$ der Mittelpunkt einer Seitenfläche (A'' in Fig. 5) und deshalb $x_1 + x_2 = 0$ die Gleichung des Mittelraumes senkrecht auf $A'' B''$.

Daher bedienen wir uns der Transformation

$$\left.\begin{array}{l} t_1\sqrt{2} = x_1 + x_2 \\ t_2\sqrt{2} = x_1 - x_2 \\ t_3\sqrt{2} = \qquad\qquad x_3 + x_4 \\ t_4\sqrt{2} = \qquad\qquad x_3 - x_4 \end{array}\right\} , \quad \left.\begin{array}{l} x_1\sqrt{2} = t_1 + t_2 \\ x_2\sqrt{2} = t_1 - t_2 \\ x_3\sqrt{2} = \qquad\qquad t_3 + t_4 \\ x_4\sqrt{2} = \qquad\qquad t_3 - t_4 \end{array}\right\} \ldots 3)$$

und erhalten dann die 16 Punkte und 8 Räume (für $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ als Coordinateneinheit) in der Form

1, 0, 1, 0	1, 0, −1, 0	−1, 0, 0, −1	
	0, 1, 0, 1	−1, 0, 0, 1	$t_1 + t_2 = \pm 1$
0, −1, 1, 0	0, 1, 0, −1	0, −1, −1, 0	$t_1 - t_2 = \pm 1$
0, 1, 1, 0	0, −1, 0, 1	0, 1, −1, 0	$t_3 + t_4 = \pm 1$
1, 0, 0, −1	0, −1, 0, −1		$t_3 - t_4 = \pm 1$
1, 0, 0, 1	−1, 0, 1, 0	−1, 0, −1, 0	

Es werden deshalb Projection auf $t_1 = 0$ und Schnitt mit $t_1 = 0$ in vollem Einklange mit den errungenen Ergebnissen von Fig. 9 angegeben.

12. Anstatt der Formeln 2) und 3) hätten wir auch die Formeln

$$\left.\begin{array}{l} 3z_1 = \qquad\qquad\quad x_2\sqrt{3} + x_3\sqrt{3} + x_4\sqrt{3} \\ 3z_2 = x_1\sqrt{3} - 2x_2 \quad + x_3 \quad + x_4 \\ 3z_3 = x_1\sqrt{3} + x_2 \quad - 2x_3 \quad + x_4 \\ 3z_4 = x_1\sqrt{3} + x_2 \quad + x_3 \quad - 2x_4 \end{array}\right\} , \quad \left.\begin{array}{l} t_1\sqrt{2} = x_1 + x_2 \\ t_2\sqrt{2} = x_1 - x_2 \\ t_3 = x_3 \\ t_4 = x_4 \end{array}\right\}$$

anwenden können. Wir haben aber die gewählten Formeln vorgezogen, weil aus ihnen einige neue Wahrheiten abzuleiten sind.

Aus der Transformation 1) geht hervor, dass die 8 Zelldiagonalen des Z_a^8 sich auf nur eine Art in zwei Systeme von vier senkrechten Coordinatenachsen zerlegen lassen. Denn es sind die neuen Achsen die Diagonale AB (Fig. 1) und die drei Körperdiagonalen des $O_{a\sqrt{2}}$ und wenn AB gewählt ist, ist der Schnitt $O_{a\sqrt{2}}$ bestimmt.

Auf die nämliche Art liegt der Transformation 2) ein System von vier zu je zweien zu einander senkrechten ersten Querlinien OA' (Fig. 3) zu Grunde. Ist nun OA' gewählt, so kann man entweder die drei Diagonalen OP_1, OP_3, OP_5 oder die drei Diagona-

len OP_2, OP_4, OP_6 als andere Achsen annehmen. Es bilden also die 16 ersten Querlinien $\frac{16\times 2}{4}$ d. h. 8 Systeme von vier senkrechten Coordinatenachsen.

So fortfahrend findet man, dass die neuen Coordinatenachsen der Transformation 3) vier zweite Querlinien sind. Zu $A''B''$ (Fig. 5) gesellt sich die Verbindungslinie $C''D''$ der Mittelpunkte der Seitenflächen des Schnittes, welche auch Seitenflächen des Z_a^8 sind, und das Paar von Verbindungslinien der Mitten Q_1Q_2, Q_3Q_4. Es bilden also die 12 zweiten Querlinien $\frac{12}{4}$, d. h. 3 Systeme von vier senkrechten Coordinatenachsen.

Dem Satze über die 8 Zelldiagonalen des Z_a^8 entsprechend findet man im Raume von 2^n Dimensionen, dass die 2^{2n-1} Diagonalen des Wesens mit 2^{2n} Eckpunkten 2^{n-1} Systeme von 2^n zu je zweien zu einander senkrechten Coordinatenachsen bilden. So kann im Raume R_8 ein System von Formeln, den Gleichungen 1) analog, gefunden werden, wobei folgende Zeichengruppierung vorkommt:

$$\begin{array}{cccccccc}
+ & + & + & + & + & + & + & + \\
+ & + & + & + & - & - & - & - \\
+ & + & - & - & + & + & - & - \\
+ & - & + & - & + & - & + & - \\
+ & + & - & - & - & - & + & + \\
+ & - & + & - & - & + & - & + \\
+ & - & - & + & - & + & + & - \\
+ & - & - & + & + & - & - & +
\end{array}$$

IV. Reciprocität von Achtzell und Sechszehnzell.

13. Die Polarfigur des Z_a^8 in Bezug auf die concentrische Hypersphäre $H_{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}$ mit dem Radius $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ ist ein concentrisches Sechszehnzell Z_a^{16} mit der Seitenlänge a. Dabei bilden die Eckpunkte, Kanten, Seitenflächen und begrenzenden Körper des einen Zelles die Polarfiguren der begrenzenden Körper, Seitenflächen, Kanten und Eckpunkte des anderen Zelles. Ist R_3 irgend ein dreidimensionaler Raum und P sein Pol, so sind die Schnitte von R_3 mit den Kanten, Seitenflächen und begrenzenden Körpern des einen Zelles offen-

bar die Polarbildungen der linearen dreidimensionalen Räume, Ebenen und Geraden, welche durch Verbindung von P mit den Seitenflächen, Kanten und Eckpunkten des anderen Zelles entstehen. In Bezug auf die Kugel, welche den Schnitt von $H_{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}$ und R_3 bildet, sind deshalb die Schnitte von R_3 mit den Kanten, Seitenflächen und begrenzenden Körpern des einen Zelles die Polarfiguren der aus dem Centrum P auf R_3 geworfenen centralen Projectionen von den Seitenflächen, Kanten und Eckpunkten des anderen Zelles. Ist R_3 ein durch den Mittelpunkt O von $H_{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}$ gehender Raum und also P unendlich entfernt, so hat man es mit den senkrechten Projectionen zu thun.

Es können also die Schnitte und Projectionen von Z_a^{16} aus den Projectionen und Schnitten von Z_a^8 abgeleitet werden.

V. Schnitte und Projectionen von Z_a^{16}.

14. In gedrängter Kürze geben wir hier die in der oben angedeuteten Weise zu erhaltenden Resultate:

„Die senkrechte Projection des Z_a^{16} in der Richtung einer Zelldiagonale ist ein Octaeder O_a (§ 3, zweiter Satz)."

„Die senkrechte Projection des Z_a^{16} in der Richtung einer ersten Querlinie ist eine regelmässige vierseitige Doppelpyramide mit a als Seite des Quadrates und $\frac{1}{2}a$ als halbe Höhe (§ 3, erster Satz)."

„Die senkrechte Projection des Z_a^{16} in der Richtung einer zweiten Querlinie ist eine regelmässige sechsseitige Doppelpyramide mit $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$ als Seite des Sechsecks und $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ als halbe Höhe (§ 2)."

„Die senkrechte Projection des Z_a^{16} in der Richtung einer Verbindungslinie der Mittelpunkte von zwei einander gegenüberstehenden begrenzenden Tetraedern ist ein Würfel $W_{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}$ (§ 1)".

15. „Der Schnitt des Z_a^{16} mit einem Mittelraume senkrecht auf einer Zelldiagonale ist ein O_a (§ 7, zweiter Satz). Bei paralleler Verschiebung des Mittelraumes ändert sich die Dimension des Octaeders".

„Der Schnitt des Z_a^{16} mit einem Mittelraume senkrecht auf einer ersten Querlinie $A'B'$ ist eine regelmässige vierseitige Doppelpyramide (Fig. 10) mit a als Seite des Quadrates und $\frac{1}{2}a$ als halbe Höhe (§ 7, erster Satz). Achse der Doppelpyramide ist die zweite Querlinie Q_1Q_2, welche mit den Kanten deren Mitten A' und B' sind in einer Ebene liegen. Bei paralleler Verschiebung des Schnittraumes werden die Basisecken P_1, P_2, P_3, P_4 der Doppelpyramide (Fig. 11) von Ebenen senkrecht auf den Diagonalen des Quadrates abgestumpft".

„Der Schnitt des Z_a^{16} mit einem Mittelraume senkrecht auf einer zweiten Querlinie $A'' B''$ ist eine regelmässige sechsseitige Doppelpyramide (Fig. 12) mit $\frac{1}{2} a$ als Seite des Sechseckes und $\frac{1}{2} a \sqrt{2}$ als halbe Höhe (§ 6). Achse der Doppelpyramide ist jene Achse $Q_1 Q_2$ des Z_a^{16}, welche mit dem Dreiecke RST, wovon A'' der Mittelpunkt is keinen Punkt gemein hat. Bei paralleler Verschiebung des Schnittraumes löst sich die sechsseitige Doppelpyramide in zwei regelmässige dreiseitige Doppelpyramiden (Fig. 13) auf, von welchen die untergeordnete die Basisecken der vorherrschenden zweiflächig zuschärft".

„Der Schnitt des Z_a^{16} mit einem Mittelraume senkrecht auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte von zwei einander gegenüberstehenden begrenzenden Tetraedern ist eine Combination (Fig. 14) vom Octaeder $O_{a\sqrt{2}}$ mit dem Würfel $W_{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}$ in Gleichgewicht (§ 5). Bei paralleler Verschiebung des Schnittraumes behalten die Würfelebenen ihre gegenseitige Lage und zerfällt (Fig. 15) das Octaeder in zwei ungleich stark entwickelte Tetraeder. Dabei bleibt der Schnittpunkt T der Seitenflächen RST und TUV (Fig. 14 und Fig. 15) auf der Würfelkante; deshalb wird der Körper begrenzt von vier grossen und vier kleinen gleichseitigen Dreiecken und sechs Rechtecken bis an die Grenze nur ein regelmässiges Tetraeder übrig bleibt".

Offenbar erhält man das hier nicht benutzte Schema der Coordinaten der Eckpunkte des Z_a^{16} in Bezug auf die vier Zelldiagonalen als Achsen, indem man auf alle mögliche Weisen drei der vier Coordinaten verschwinden lässt und der vierten den absoluten Wert $\frac{1}{2} a \sqrt{2}$ erteilt.

In einer folgenden Mitteilung werde ich die Untersuchung au das Vierundzwanzigzell ausdehnen. Dabei wird dann die Zerlegung der 8 Zelldiagonalen des Z_a^{8} in zwei Systeme von vier senkrechten Coordinatenachsen in ein neues Licht erscheinen.

N.B. Ein Teil der mitgeteilten Ergebnisse ist auch von Herrn T PROCTOR HALL im Aprilhefte vom „*American Journal of Mathematics*" dieses Jahres veröffentlicht in der Abhandlung „The Projection of Fourfold Figures upon a Three-Flat". Die Behandlungsweise wird jedoch genügend zeigen, dass ich nicht von dieser Arbeit beeinflusst worden bin.

Groningen, September 1893.

ERKLÄRUNG DER TAFEL.

Fig. 1. Das Achtzell (blau) wird vom Mittelraume senkrecht auf der Zelldiagonale AB in das Octaeder $P_1 P_2 \dots P_6$ (rot) geschnitten.

» 2. Bei paralleler Verschiebung des Schnittraumes löst sich das Octaeder $P_1 P_2 .. P_6$ (rot) in zwei ungleich stark entwickelte Tetraeder (blau) auf.

» 3. Das Achtzell (blau) wird vom Mittelraume senkrecht auf der ersten Querlinie $A'B'$ in ein regelmässiges sechsseitiges Prisma (rot) geschnitten.

» 4. Bei paralleler Verschiebung des Schnittraumes löst sich das sechsseitige Prisma (rot) in zwei ungleich stark entwickelte regelmässige dreiseitige Prismen (blau) auf.

» 5. Das Achtzell (blau) wird vom Mittelraume senkrecht auf der zweiten Querlinie $A''B''$ in ein regelmässiges vierseitiges Prisma (rot) geschnitten.

» 6. Auflösung des Rhombendodekaeders (schwarz), seinen Eckpunkten nach, in Würfel (rot) und Octaeder (blau).

» 7. Die zwölf benummerten Eckpunkte des Kreuzes mit drei Armen (rot), welches aus sieben gleichen Würfeln besteht, bilden die Eckpunkte eines regelmässigen sechsseitigen Prismas (blau).

» 8. Stellung des regelmässigen sechsseitigen Prismas (blau) von Fig. 3 in Bezug auf drei erste Querlinien OZ_2, OZ_3, OZ_4, welche ein rechtwinkliges Achsenkreuz bilden. Die Grundebenen sind Ausbreitungen von zwei Seitenflächen des den Achsen OZ entsprechenden Octaeders (rot).

Fig. 9. Schnitt des Achtzelles mit einem Mittelraume senkrecht auf einer zweiten Querlinie und senkrechte Projection des Achtzelles auf diesen Raum.

» 10. Das Sechszehnzell (blau) wird vom Mittelraume senkrecht auf der ersten Querlinie $A'B'$ in eine regelmässige vierseitige Doppelpyramide (rot) mit der Achse $Q_1 Q_2$ geschnitten.

» 11. Bei paralleler Verschiebung des Schnittraumes werden die Basisecken der Doppelpyramide (blau) von Ebenen senkrecht auf den Diagonalen des Quadrates (rot) abgestumpft.

» 12. Das Sechszehnzell (blau) wird vom Mittelraume senkrecht auf der zweiten Querlinie $A''B''$ in eine regelmässige sechsseitige Doppelpyramide (rot) mit der Achse Q_1Q_2 geschnitten.

» 13. Bei paralleler Verschiebung des Schnittraumes löst sich die sechsseitige Doppelpyramide (rot) in zwei ungleich stark entwickelte regelmässige dreiseitige Doppelpyramiden (blau) auf.

» 14. Die Combination (blau) des Würfels (rot) und des Octaeders in Gleichgewicht, welche den Schnitt des Sechszehnzelles mit einem zu zweien der begrenzenden Räume parallelen Mittelraume bildet.

» 15. Umbildung der Combination von Fig. 14 bei paralleler Verschiebung des Schnittraumes.

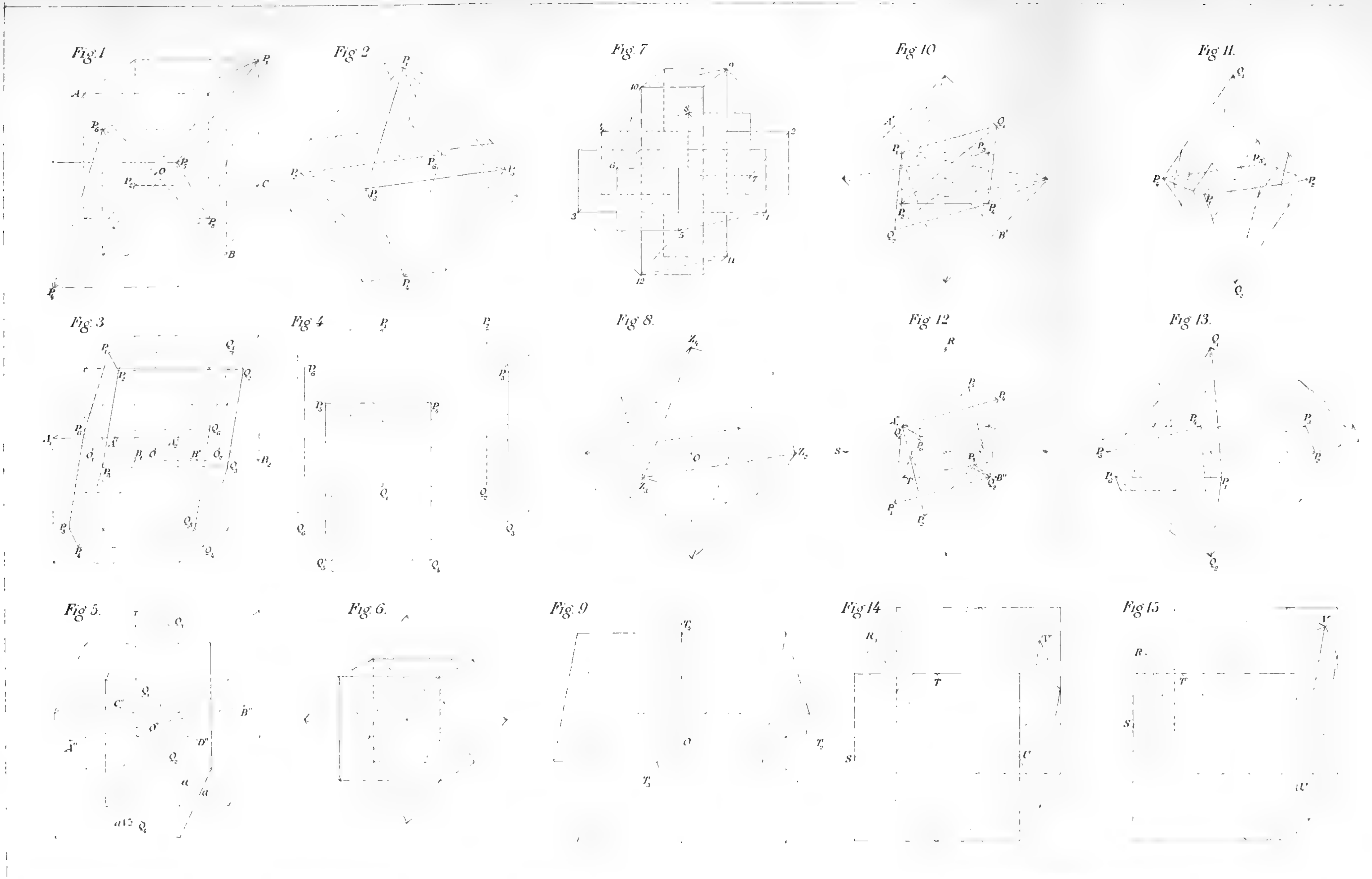


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 7
Fig. 10
Fig. 11.
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 8.
Fig. 12
Fig. 13.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 9
Fig. 14
Fig. 15

REGELMÄSSIGE

Schnitte und Projectionen

DES VIERUNDZWANZIGZELLES

IM

VIERDIMENSIONALEN RAUME.

VON

P. H. SCHOUTE.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

DEEL II. No. 4.

(MIT EINER TAFEL.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1894.

REGELMÄSSIGE

SCHNITTE UND PROJECTIONEN

DES VIERUNDZWANZIGZELLES

IM VIERDIMENSIONALEN RAUME.

VON

P. H. SCHOUTE.

I. Projection der vierdimensionalen Gebilde auf einen begrenzenden Körper.

1. Bekanntlich erhält man im dreidimensionalen Raume ein ebenes Bild der regelmässigen Körper, indem man diese senkrecht projiciert auf eine der begrenzenden Seitenflächen.

Auch im vierdimensionalen Raume muss das analoge Verfahren immer zum Ziele führen können. Einerseits wird es da ausserordentlich wertvoll sein in den Fällen, wo keine einfache perspectivische Abbildung vorliegt, keine Coordinatenstellung sich erbietet und andere sonstige Hilfsmittel fehlen. Andererseits wird es am leichtesten anwendbar sein, wenn der Winkel zwischen zwei benachbarten Zellen einen einfachen Wert hat, wie beim Z^8_a (90°), beim Z^{16}_a (120°) und beim Z^{24}_a (120°) *).

Es ist der Zweck dieses Aufsatzes den Nutzen dieser Betrachtung am Beispiele des Z^{24}_a zu zeigen. Zur Anschliessung an eine frühere Arbeit †) und zur Einleitung fangen wir jedoch mit Z^8_a und Z^{16}_a an.

2. Der Fall des Z^8_a ist unmittelbar erledigt. Es ist die ganze

*) In Bezug auf diese Winkel und ihre Berechnung vergleiche man *Wiskundige Opgaven* (T. V, 1891—93, S. 134).

†) Regelmässige Schnitte und Projectionen des Achtzelles und des Sechszehnzelles im vierdimensionalen Raume (*Verhandelingen*, eerste sectie, deel II, N° 2).

Projection des Z^8_a ein Würfel W_a. Von den acht begrenzenden Würfeln des Z^8_a projicieren sich zwei einander gegenüberliegende in W_a, die sechs übrigen in die Seitenflächen von W_a (I, § 7, zweiter Satz).

Im Falle des Z^{16}_a erhalten wir auch einen Würfel, jedoch einen $W_{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}$ (I, § 14, vierter Satz). Es bilden nl. (Fig. 1) die zwölf Seitendiagonalen des Würfels die Kanten von zwei centrischen gleich stark entwickelten complementären Tetraedern $PQRS$ und $P'Q'R'S'$, welche die hemiedrischen Formen eines nämlichen Octaeders sind. Geht man nun vom Tetraeder $PQRS$ aus und projiciert man eins der beiden Z^{16}, zu deren Begrenzung $PQRS$ gehören kann, auf $PQRS$, so hat man zünachst auf jede der vier Seitenflächen als Grundebene eine regelmässige dreiseitige Pyramide aufzusetzen, deren Höhe die halbe Höhe von $ABCD$ beträgt. Denn es ist $\cos 120° = -\frac{1}{2}$. Und nun leuchtet es ein, dass man auf diese Weise das Tetraeder zum Würfel anfüllt. So findet man, dass die 16 Tetraeder sich nach einander projicieren in $PQRS$, $P'QRS$, $PQ'RS$, $PQR'S$, $PQRS'$, die sechs Seitenflächen des Würfels, $PQ'R'S'$, $P'QR'S'$, $P'Q'RS'$, $P'Q'R'S$, $P'Q'R'S'$. Indem die dreidimensionalen Räume von sechs Tetraedern auf dem Raume $PQRS$ senkrecht stehen, wird der Würfel $W_{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}$ auf zwei verschiedene Weisen von den Projectionen von fünf Tetraedern ausgefüllt *).

3. Die Ausführung des nämlichen Gedankens beim Z^{24}_a erfordert zunächst, dass wir auf jede Seitenfläche ABC des Octaeders O_a (Fig. 2) ein zu O_a congruentes Octaeder aufsetzen und diese acht neuen Octaeder, jedesmal in die Richtung senkrecht auf die mit dem Octaeder O_a gemeinschaftliche Seitenfläche, bis auf die Hälfte zusammendrücken. Diese Construction bringt wieder die gleichwertige Combination von Würfel $W_{a\sqrt{2}}$ und Octaeder O_{2a} (I, Fig. 14) hervor, welche weiter durch das Symbol (W, O) angedeutet werden soll. Ist nl. P (Fig. 2) der Eckpunkt des $W_{a\sqrt{2}}$, welcher der Seitenfläche ABC von O_a gegenüberliegt und $A''B''C''$ das von den Endpunkten A'', B'', C'' der in P zusammenstossenden Kanten des Würfels (OP) gebildete gleichseitige Dreieck, so liegen die Schnittpunkte M, M', M'' von OP mit den parallelen Ebenen ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ offenbar so, dass die Strecken PM'', $M''M$, MO, OM' ein-

*) Man kann die Figur auch als eine Projection auf den Raum des Tetraeders $P'Q'R'S'$ betrachten. Will man den Unterschied zwischen beiden Betrachtungsweisen hervorheben, so hat man im räumlichen durchsichtigen Bilde das eine Tetraeder als sichtbar, das andere als unsichtbar anzudeuten.

ander gleich sind, und ist deshalb $A\,B\,C$, $A''B''C''$ der auf $A\,B\,C$ zu beschreibende Körper. Und dieses Ergebnis macht es leicht die Projection des Z_a^{24} zu beendigen. Es bilden nl. die sechs in den Seitenflächen des Würfels $W_{a\sqrt{2}}$ liegenden Quadrate von der Seitenlänge a die Projectionen von sechs begrenzenden Octaedern, die senkrecht auf O_a stehen, und jeder der neun in (W, O) enthaltenen Körper ist die Projection von zwei Octaedern des Z_a^{24} *).

Wenn bei der Projection der regelmässigen Körper des dreidimensionalen Raumes ein regelmässiges Polygon erhalten wird, können zwei verschiedene Fälle eintreten. Entweder sind die Projectionen der Kanten von oberer und unterer Hälfte des Körpers verschieden, oder diese Projectionen kommen zur Deckung. Analoges ereignet sich bei der Projection von Z_a^{61} und Z_a^{24} auf einen der begrenzenden Körper; bei Z_a^{16} tritt der erste, bei Z_a^{24} tritt der zweite Fall ein.

4. Es liegt das Vermuten nahe, dass die zwölf Eckpunkte des Z_a^{24}, welche sich auf den Raum des O_a in die Eckpunkte des (W, O) projicieren, im vierdimensionalen Raume einem nämlichen dreidimensionalen Raume angehören. Durch Berechnung der Entfernung dieser Punkte vom R_3 des O_a wird dieses Vermuten bestätigt. Sind $A\,B\,C$ und $A\,B\,D$ (Fig. 3) zwei Seitenflächen eines regelmässigen Körpers, welche unter dem Aussenwinkel φ an einander schliessen, so ist die Entfernung $D\,D'$ in der Richtung der dritten Dimension dem Producte $M\,D'\,.\,Tg\,\varphi$ gleich. In ganz derselben Weise findet man die Entfernung des Punktes A'' (Fig. 2) vom R_3 des O_a, wenn man Tg 60° in die Entfernung $PM'' = \frac{1}{3}\,PA''\sqrt{3} = \frac{1}{6}\,a\sqrt{6}$ des Punktes A'' von der Ebene $A\,B\,C$ multipliciert. So ergiebt sich, dass die zwölf Eckpunkte in der vierten Dimension nach derselben Seite hin vom R_3 des O_a eine gleiche Entfernung $\frac{1}{2}\,a\sqrt{2}$ haben. Demnach sind die 24 Eckpunkte des Z_a^{24} im vierdimensionalen Raume in drei parallelen dreidimensionalen Schichten gelagert, von welchen die mittlere 12 Eckpunkte, jede der beiden $\frac{1}{2}\,a\sqrt{2}$ entfernten äusseren 6 Eckpunkte aufnimmt. Beiläufig erhalten wir folgenden Satz:

„Es wird das Z_a^{24} von jedem Mittelraume, welcher zu zwei der begrenzenden Octaeder parallel ist, in einem (W, O) geschnitten."

„Bei immer weitergehender paralleler Verschiebung des Schnittraumes werden an den Octaederflächen des (W, O) immerfort Scheibchen abgehobelt und geht der Schnittkorper allmählich in ein Octae

---

*) Es tritt dieses (W, O) auch bei der Schlegel'schen Projection auf.

der über, indem es dem Zwischenstadium (Fig. 4) eines Octaeders, dessen Ecken vom Würfel abgestumpft sind, passiert.

5. Aus der eben gefundenen Schichtung der 24 Eckpunkte des Z_a^{24} in drei parallelen Räumen folgt unmittelbar, wie Z_a^{24} sich auf den mittleren Raum projiciert. Man findet:

„In senkrechter Projection des Z_a^{24} auf irgend einen zu zwei begrenzenden Octaedern parallelen Mittelraum bilden die Eckpunkte des Z_a^{24} die Eckpunkte des Schnittes (W,O), die ihre eigene Projection sind, und die doppelt zu zählenden Mittelpunkte der Quadrate des (W,O), welche die Eckpunkte eines Octaeders und die Projectionen der Eckpunkte der beiden parallelen Octaeder sind".

Projiciert man aber das Z_a^{24} in schräger Richtung auf den nämlichen Mittelraum, so erhält man eine parallel-perspectivische Abbildung (Fig. 5). Diese wird aus einem Drahtmodelle des (W,O) abgeleitet, indem man durch die Mittelpunkte A, B, C, A', B', C' der Quadrate des (W,O) in diesen Punkten halbierte Strecken aa', bb', cc', $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ gleicher Länge und Richtung annimmt und dann die Endpunkte jeder Strecke mit denen des entsprechenden Quadrates, die gleichartigen Endpunkte der sechs Strecken zu Kanten zweier Octaeder unter einander verbindet.

Die Figur zeigt deutlich die 24 Octaeder, welche das Z_a^{24} begrenzen. Es wird nämlich der Projectionskörper ausgefüllt erstens vom Octaeder $abc\,\alpha\beta\gamma$, den acht anliegenden Octaedern und den drei Octaedern mit den Körperdiagonalen $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, zweitens vom Octaeder $a'b'c'\,\alpha'\beta'\gamma'$, den acht anliegenden Octaedern und den drei Octaedern mit den Körperdiagonalen aa', bb', cc'. In der senkrechten Projection (Fig. 2) des unmittelbar vorhergehenden Satzes fallen die beiden Verteilungen des (W,O) zusammen.

Ist der Mittelpunkt O des (W,O) ebenfalls der Mittelpunkt der Strecke PP', welche den genannten Strecken parallel und gleich angenommen ist, so leuchtet ein, dass die 12 Eckpunkte des (W,O) von P und P' die gleiche Entfernung a haben, u. s. w.

II. Coordinatenstellung des Z_a^{24}.

6. Es führt die Betrachtung des Bildes (Fig. 5) des Drahtmodelles unmittelbar zu einer Coordinatenstellung des Z_a^{24}. In Bezug auf die Coordinatenachsen OA, OB, OC, OD findet man das Schema:

$a_1 \dots 0,\ p,\ p,\ 0$	$b_1 \dots p,\ 0,\ p,\ 0$	$c_1 \dots p,\ p,\ 0,\ 0$
$a_2 \dots 0,\ n,\ p,\ 0$	$b_2 \dots p,\ 0,\ n,\ 0$	$c_2 \dots n,\ p,\ 0,\ 0$
$a_3 \dots 0.\ n,\ n,\ 0$	$b_3 \dots n,\ 0,\ n,\ 0$	$c_3 \dots n,\ n,\ 0\ \ 0$
$a_4 \dots 0,\ p,\ n,\ 0$	$b_4 \dots n,\ 0,\ p,\ 0$	$c_4 \dots p,\ n,\ 0,\ 0$
$a \dots p,\ 0,\ 0,\ p$	$b \dots 0,\ p,\ 0,\ p$	$c' \dots 0,\ 0,\ p,\ p$
$a' \dots p,\ 0,\ 0,\ n$	$b' \dots 0,\ p,\ 0,\ n$	$c \dots 0,\ 0,\ p,\ n$
$\alpha \dots n,\ 0,\ 0,\ p$	$\beta \dots 0,\ n,\ 0,\ p$	$\gamma \dots 0,\ 0,\ n,\ p$
$\alpha' \dots n,\ 0,\ 0,\ n$	$\beta' \dots 0,\ n,\ 0,\ n$	$\gamma' \dots 0,\ 0,\ n,\ n$

,

worin p und n für $+\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ und $-\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ stehen. Man wird sofort bemerken, dass dieses Schema sehr regelmässig ist; es enthält alle Punkte, von welchen zwei der Coordinaten verschwinden und die zwei anderen den absoluten Wert $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ haben.

7. Die gefundenen Coordinatenwerte ermöglichen die Bestimmung von einigen metrischen Verhältnissen. So findet man nach einander für die Länge von centraler Zelldiagonale, erster, zweiter und dritter Querlinie (Entfernung der parallelen Octaederräume) $2a$, $a\sqrt{3}$, $\frac{2}{3}a\sqrt{6}$ und $a\sqrt{2}$, für den Winkel von Zelldiagonale und angrenzender erster Querlinie und für den Winkel von angrenzender zweiter und dritter Querlinie 30°, u. s. w.

Mittels der gefundenen Coordinatenwerte kann auch der bekannte Satz, nach welchem die Polarfigur des Z_a^{24} in Bezug auf eine concentrische Hypersphere vom Radius $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ ein congruentes Z_a^{24} in anderer Stellung ist, bewiesen werden. Dabei ergiebt sich, dass die Zelldiagonalen, ersten, zweiten und dritten Querlinien des einen respective mit den dritten, zweiten, ersten Querlinien und Zelldiagonalen des anderen zusammenfallen.

8. Wir untersuchen zunächst, welche besondere Lage der Räume der 24 begrenzenden Octaeder der Schichtung der 24 Eckpunkte in drei parallelen Räumen dualistisch entspricht. Dazu bemerken wir, dass die Polarfigur der drei parallelen Räume von drei Punkten O', P, P' gebildet wird, welche auf einer durch O gehenden Geraden liegen; von diesen Punkten ist O' unendlich entfernt und wird die Strecke PP' in O halbiert. Wir finden deshalb, dass durch jeden der beiden Punkte P, P' sechs Octaeder gehen, was allerdings bekannt ist — denn jeder Eckpunkt Z_a^{24} ist Eckpunkt von sechs Octaedern —, und dass die übrigen 12 Octaeder zu der Geraden

PP' parallel sind und sich also auf den Mittelraum, welcher PP' senkrecht halbiert, als Ebenen projicieren.

Der Reciprocität nach verlangt der Satz von § 4, dass die senkrechte Projection des Z_a^{24} in der Richtung einer Zelldiagonale ein Rhombendodekaeder $R_{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}$ sei. Es stimmt dies genau mit der oben gefundenen Thatsache der 12 senkrechten Octaeder. Und es kann offenbar (Fig. 6) das R in sechs octaederförmige Körper (AO, $PRQ'S$), (BO, $QPSR'$), u. s. w. verteilt werden, welche doppelt gezählt die Projectionen der übrigen 12 Octaeder bilden. Deshalb finden wir den Satz:

„Die senkrechte Projection des Z_a^{24} in der Richtung der Zelldiagonale ist ein $R_{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}$''.

Die Abzählung der Eckpunkte in der letzten Projection zeigt, dass im Mittelpunkte O und in jedem der acht Würfelpunkte P, Q, R, S, P', Q', R', S' zwei Projectionen zusammenfallen, in jedem der sechs Octaederpunkte A, B, C, A', B', C' sich jedoch nur ein Eckpunkt projiciert. Es scheint deshalb, dass der Mittelraum nur die sechs Octaedereckpunkte enthält und der Schnitt dieses Mittelraumes mit Z_a^{24} ein Octaeder $O_{a\sqrt{2}}$ ist. Dies ist aber nicht der Fall. Obgleich der Mittelraum nur sechs Eckpunkte des Z_a^{24} aufnimmt, ist der Schnitt doch ein $R_{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}$, wie es die dualistische Umkehrung des Satzes von § 5 verlangt. Denn es wird dieser Schnitt von den 12 senkrecht auf dem Schnittraume stehenden 12 Octaedern eingeschitten. Also finden wir:

„Es wird das Z_a^{24} von jedem Mittelraume senkrecht auf einer Zelldiagonale in ein $R_{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}$ geschnitten".

„Bei allmählich weitergehender paralleler Verschiebung des Schnittraumes werden erst die Octaederecken des $R_{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}$ vom Würfel abgestumpft (Fig. 7), bis endlich ein Würfel W_a zurückbleibt. Wird die Bewegung dann noch weiter fortgesetzt, so verringert sich die Seitenlänge des Würfels bis Null".

Wir bemerken, dass auch in Bezug auf Räume senkrecht zu einer Zelldiagonale von einer Schichtung die Rede sein kann, wobei sich 1, 8, 6, 8, 1 der Punkte in den auffolgenden parallelen Schichten lagern.

Bei schräger Projection der 18 Eckpunkte, welche sich in O und in den Würfeleckpunkten projicierten, erhalten wir eine zweite parallel-perspectivische Abbildung (Fig. 8). Diese wird aus einem Drahtmodelle des $R_{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}$ abgeleitet, indem man durch die Würfeleckpunkte P, Q, R, S, P', Q', R', S' in diesen Punkten halbierte

Strecken $P_1 P_2$, $Q_1 Q_2$, $R_1 R_2$, u s. w. gleicher Richtung und Länge annimmt, durch O eine in diesem Punkt halbierte Strecke $D D'$ gleicher Richtung und doppelter Länge hindurchlegt und diese Punkte nachher zur Bildung der 24 Octaeder in geeigneter Weise unter einander verbindet. Es wird diese Verbindungsweise nachher schärfer gekennzeichnet werden.

9. Berechnet man (Fig. 8) die Länge von OD, indem man D, D' und den unendlich fernen Punkt von DD' als Pole von den drei parallelen Räumen von § 4 betrachtet, so findet man $OD = a$. Es sind demnach die Coordinaten der 24 Eckpunkte des Z^{24}_a in Bezug auf die Achsen OA, OB, OC, OD durch das Schema

$$(\pm a, 0, 0, 0),\ (0, \pm a, 0\ 0),\ (0, 0, \pm a, 0),\ (0, 0, 0, \pm a),$$

$$(\pm \tfrac{1}{2} a, \pm \tfrac{1}{2} a, \pm \tfrac{1}{2} a, \pm \tfrac{1}{2} a)$$

gegeben. Daraus folgt der merkwürdige Satz:

„Die 24 Eckpunkte des Z^{24}_a zerfallen in die 8 Eckpunkte eines $Z^{16}_{a\sqrt{2}}$ und die 16 Eckpunkte eines Z^8_a".

Hieraus folgt unmittelbar die am Ende des § 8 nicht näher angedeutete Verbindung. Offenbar hat man (Fig. 8) die Endpunkte A, C irgend einer Kante des $Z^{16}_{a\sqrt{2}}$ jedesmal mit den vier Eckpunkten $P_1 R_1' R_2' P_2$ jener Seitenfläche des Z^8_a zu vereinigen, auf welcher die Kante $A C$ im Mittelpunkte senkrecht steht.

Es hat das Z^{24}_a zwölf Zelldiagonalen, welche sich zu drei rechtwinkligen Coordinatenachsensystemen anordnen. Denn, sobald man eine Diagonale auserwählt hat, ist der senkrechte Mittelraum, welcher die drei zugehörigen enthält, bestimmt. Deshalb findet man:

„Die Zerlegung des Z^{24}_a in $Z^{16}_{a\sqrt{2}}$ und Z^8_a den Eckpunkten nach kann in drei verschiedenen Weisen geschehen."

Man liest diese dreifache Zerlegung leicht aus dem Bilde (Fig. 5) ab. Offenbar giebt es drei Octupel $(a, \alpha), (b, \beta), (c\ \gamma)$ von Ecken. Jedes dieser Octupel enthält die Eckpunkte eines $Z^{16}_{a\sqrt{2}}$, jedes Paar dieser Octupel enthält die Eckpunkte eines Z^8_a. Wie man erblickt, bestehen die 96 Kanten des Z^{24}_a jedesmal aus den 32 Kanten des Z^8_a und die 8×8 Verbindungslinien von jedem der 8 Eckpunkte des Z^{16}_a mit den 8 Eckpunkten des angrenzenden Würfels von Z^8_a.

Aus den gefundenen folgen weiter noch die Sätze:

„Den Eckpunkten nach ist das Z^8_a eine Combination von zwei $Z^{16}_{a\sqrt{2}}$ (Fig. 9). Es bilden die 2×24 Kanten des $Z^{16}_{a\sqrt{2}}$ die 48 Diagonalen der Seitenflächen des Z^8_a".

„Den Eckpunkten nach ist das Z^{24}_{a} eine Combination von drei $Z^{16}_{a\sqrt{2}}$. Es bilden die 3 × 24 Kanten des $Z^{16}_{a\sqrt{2}}$ die 24 × 3 Körperdiagonalen der begrenzenden Octaeder des Z^{24}_{a}".

Der erste dieser beiden Sätze folgt auch aus der ersten Arbeit (I, § 14); der zweite ist in derselben Weise aus der Bemerkung abzuleiten, dass die 12 Zelldiagonalen des Z^{24}_{a} drei Systeme von rechtwinkligen Coordinatenachsen bilden.

Aus der angegebenen Quelle (I, § 14) fliesst noch der neue Satz:

„Den Eckpunkten nach ist das $Z^{2^{n+1}}_{a}$, welches im Raume mit 2^n Dimensionen das Mass bildet, eine Combination von 2^{n+1} Zellen $Z^{2^{2^n}}_{a\sqrt{2}}$".

Natürlich stellen sich den angedeuteten Zerlegungen den Eckpunkten nach Zerlegungen den begrenzenden Räumen nach zur Seite. Mit Beachtung folgenden Schemas der

		Z^{8}_{a}	Z^{16}_{a}	Z^{24}_{a}
Länge von	Zelldiagonale. . .	$2a$	$a\sqrt{2}$	$2a$
	erster Querlinie.	$a\sqrt{3}$	a	$a\sqrt{3}$
	zweiter „ . . .	$a\sqrt{2}$	$\frac{1}{3}a\sqrt{6}$	$\frac{2}{3}a\sqrt{6}$
	dritter „ . . .	a	$\frac{1}{2}a\sqrt{2}$	$a\sqrt{2}$

findet man nach einander:

„Die 16 begrenzenden Tetraederräume des Z^{16}_{a} zerfallen in die 2 × 8 begrenzenden Würfelräume von zwei $Z^{8}_{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}$, u. s. w".

„Die 24 begrenzenden Octaederräume des Z^{24}_{a} zerfallen auf drei verschiedene Weisen in die 16 Tetraederräume eines Z^{16}_{2a} und die 8 Würfelräume eines $Z^{8}_{a\sqrt{2}}$ und auf eine einzige Weise in die 3 × 8 Würfelräume von drei $Z^{8}_{a\sqrt{2}}$. Bei jeder der ersten Zerlegungen bilden die 32 Seitenflächen des Z^{16}_{2a} und die 8 × 8 Schnittebenen von jedem der 8 begrenzenden Würfelräume des $Z^{8}_{a\sqrt{2}}$ mit den 8 in dem anliegenden Eckpunkte der Z^{16}_{2a} zusammenstossenden 8 Tetraderräume die Ebenen der 16 Seitenflächen des Z^{24}_{a}. Und bei der letzten Zerlegung bilden die 3 × 24 Seitenflächen der drei $Z^{8}_{a\sqrt{\ }}$ die 24 × 3 Schnittebenen der in den Eckpunkten zusammentretenden einander gegenüberliegenden Octaederräume".

„Den begrenzenden Räumen $2^n - 1^{\text{ster}}$ Dimension nach ist das $Z^{2^{2^n}}_{a}$ eine Combination von 2^{n-1} Zellen $Z^{2^{n+1}}_{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}$, u. s. w."

Es bilden die Sätze dieser Zerlegungen in gewissem Sinne Er-

weiterungen des bekannten Satzes, nach welchem die Eckpunkte eines Würfels und die Seitenflächen eines Octaeders die Eckpunkte und Seitenflächen von zwei Tetraedern sind (Fig. 1).*)

10. Zur Ableitung anderer Schnitte und Projectionen des Z_a^{24} fassen wir die gegenseitige Lage der bei den Zerlegungen gefundenen Componenten etwas näher in's Auge. Dabei bedienen wir uns der Notation D^n, $Q_1{}^n$, $Q_2{}^n$, $Q_3{}^n$ zur Andeutung von Diagonalen, ersten, zweiten und dritten Querlinien des Zelles Z^n.

Betrachten wir zuerst die Zerlegung des Z_a^8 in zwei $Z_{a\sqrt{2}}^{16}$ (Fig. 9) und legen wir zur Unterscheidung den 8 Eckpunkten der einen $Z_{a\sqrt{2}}^{16}$ die Buchstabe p, denen des anderen die Buchstabe n bei, so bestätigt man unmittelbar die in die Gleichungen

$$8\, D^8 = 4\, D^{16} + 4\, Q_3{}^{16}\,, \quad 12\, Q_2{}^8 = 12\, Q_1{}^{16}$$

niedergelegten Resultate, wobei nur auf Coincidenz der Geraden, nicht auf ihre Länge geachtet wird. Dabei ergiebt sich, dass die beiden Componenten $Z_{a\sqrt{2}}^{16}$ in ihren 12 Q_1 übereinstimmen und die 4 D des einen die 4 Q_3 des anderen sind.

Zwischen den 8 D^8 und den vier Achsen des Z_a^8 besteht ein sehr einfacher Verband. Es sind nl. alle spitzwinkligen Dreiecke $n\,O\,p$ (Fig. 9) gleichseitig. Also findet man:

„Es bilden die 8 D^8 den vollständigen Durchschnitt von den vier vierdimensionalen Kegeln, welche eine der Achsen des Z_a^8 zur Achse und 60° zum halben Scheitelwinkel haben".

Bei den Zerlegungen des Z_a^{24} beschränken wir uns auf diejenigen in zwei Componenten. Unterscheiden wir dabei die Zerlegung nach den begrenzenden Räumen mit kleinen Buchstaben, so gelten die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} 12\, D^{24} = 8\, D^8 + 4\, D^{16} = 12\, q_1{}^{16} = 12\, q_2{}^8 \\ 48\, Q_1{}^{24} = 16\, Q_1{}^8 + \;\ldots\ldots = 16\, Q_2{}^{16} + \;\ldots\ldots \\ 48\, Q_2{}^{24} = 16\, q_2{}^{16} + \;\ldots\ldots = 16\, q_1{}^8 + \;\ldots\ldots \\ 12\, Q_3{}^{24} = 12\, Q_2{}^8 = 12\, Q_1{}^{16} = 8\, q_3{}^{16} + 4\, q_3{}^8 \end{array}\right\},$$

*) Ich erinnere hier an den bekannten Satz, der aussagt, dass die 15 ersten Querlinien entweder eines regelmässigen Pentagondodekaeders oder eines regelmässigen Ikosaeders fünf rechtwinklige Coordinatenachsensysteme bilden (F. KLEIN, *Vorlesungen über das Ikosaeder*, Seiten 18, 19). Wie viele Sätze der nämlichen Art wird das weitere Studium des vierdimensionalen Raumes uns wohl nicht bringen können?

wobei nochmals hervorgehoben werden muss, dass nur auf Lage, nicht auf Länge der Linien geachtet ist.

11. Wir kommen jetzt zu den Schnitten und Projectionen des Z_a^{24} in Bezug auf Mittelräume senkrecht zu den ersten und zweiten Querlinien. Teilweise werden diese mit Hilfe der gefundenen Zerlegungen abgeleitet. In Uebereinstimmung mit den letzten Gleichungen ist nl. die erste Querlinie OP (Fig. 8) des Z_a^{24} auch eine erste Querlinie eines Z_a^8 und eine zweite Querlinie eines $Z_{a\sqrt{2}}^{16}$, welche zusammen die Eckpunkte des Z_a^{24} liefern. Wirklich verbindet sie die Mittelpunkte von den Kanten $(P_1 P_2, P'_1 P'_2)$ des Z_a^8 und von den Seitenflächen $(A\,B\,C, A'\,B'\,C')$ des $Z_{a\sqrt{2}}^{16}$, wie man mittels Vergleichung von Fig. 6 und Fig. 8 leicht erblickt. Und vermöge der dreifachen Zerlegung des Z_a^{24} gilt diese Behauptung für jede erste Querlinie des Z_a^{24}. Also findet man die senkrechte Projection in der Richtung der ersten Querlinie durch Combination *) der Projectionen von Z_a^8 in der Richtung der ersten und vom $Z_{a\sqrt{2}}^{16}$ in der Richtung der zweiten Querlinie. So findet man die Combination eines regelmässigen sechsseitigen Prismas von der Seitenlänge $\frac{1}{3}a\sqrt{6}$ und der Höhe a (I, § 6) mit einer regelmässigen sechsseitigen Doppelpyramide von der Seitenlänge $\frac{1}{3}a\sqrt{6}$ und der Höhe $2a$ (I, § 14, dritter Satz). Weil O der gemeinschaftliche Mittelpunkt, OD die gemeinschaftliche Achsenrichtung der beiden sechsseitigen Gebilde ist, wird die gegenseitige Lage der beiden Körper (Fig. 10) leicht erkannt. Dabei ist nicht zu übersehen, dass der verfolgte Weg in erster Instanz nur zur Kenntnis der Eckpunkte, jedenfalls nicht zur Kenntnis der Seitenflächen des Projectionskörpers führt und dieser Uebelstand unter mehr dadurch beseitigt werden kann, dass man die 96 Kanten abzählt. Nun sind die 24 Eckpunkte aus den 8 Eckpunkten $a_1, a_2, .. a_6, z, z'$ der Doppelpyramide, den 12 Eckpunkten $b_1, b_2, .. b_6, c_1, c_2 \dots c_6$ und den doppelt zu zählenden Mittelpunkten M, M' der Grundebenen des Prismas aufgebaut und kommen neben den 32 Kanten der Projection des Z_a^8 (d. h. die 18 Kanten, die 2×6 Radien der Grundebenen und die doppelt zu zählende Achse MM' des Prismas) auch die Verbindungslinien zb_1 $zb_2, \dots zb_6$, und $z'c_1, z'c_2, \dots z'c_6$ unter den Projectionen der 96 Kanten vor. Deshalb findet man leicht, dass der Projectionskörper ein

---

*) Das hier angegebene Verfahren hätten wir auch in der vorhergehenden Arbeit benutzen können. Abgesehen von der Thatsache, dass die Zerlegungen uns damals noch unbekannt waren, wird man bald einsehen, dass diese Methode in ihre Anwendung auf Z^8 und Z^{16} nicht einfach ist.

von zwei sechsseitigen Pyramiden gedecktes sechsseitiges Prisma ist, also in Projection 20 Eckpunkte des Z_a^{24} an der Oberfläche, vier (zwei doppelt zu zähleude) im Innern des Projectionskörpers liegen. Und indem sich sechs der 24 Octaeder in den Seitenflächen des Prismas projicieren, zeigen die Fig. 11^a, 11^b, 11^c eine der beiden Verteilungen des Projectionskörpers in 3×3 Octaeder.

Bestimmen wir die Polarfigur des erhaltenen Körpers in Bezug auf die Hypersphere mit dem Radius $\frac{1}{2} a\sqrt{8}$, so finden wir den Schnitt des Z_a^{24} mit dem Mittelraume senkrecht zu einer zweiten Querlinie. Weil der ursprüngliche Körper (Fig. 10) 18 Seitenflächen und 14 Eckpunkte hat, zählt die Polarfigur 18 Eckpunkte und 14 Seitenflächen; sie ist (Fig. 12) eine auf beiden Seiten abgestumpfte Doppelpyramide mit der Höhe $a\sqrt{2}$ und den Radien $\frac{1}{2} a$ und a von Grundebenen und Symmetrieebene.

III. Anwendung von Transformation der Coordinaten.

12. Die Transformation 2) der vorhergehenden Arbeit (I, § 10) führt vom Systeme von vier Zelldiagonalen des Z_a^8 zum Systeme von vier ersten Querlinien von Z_a^8 und hat also für Z_a^{24} die nämliche Bedeutung. Wendet man sie auf die Polarfigur des Z_a^{24} an, so führt sie vom Systeme von vier dritten Querlinien von Z_a^{24} zum Systeme von vier zweiten Querlinien des Z_a^{24}. Deshalb wenden wir es auf das Schema des § 6 an, um die Coordinaten der 24 Eckpunkte in Bezug auf dieses neue System zu erhalten. Wir finden in der nämlichen Reihenfolge in $\frac{1}{6} a\sqrt{6}$ als Einheit

2, — 1, 1, 0	1, — 2, — 1, 0	1, — 1, 0, — 2
0, — 1, — 1, 2	— 1, 0, — 1, — 2	1, 1, 2, 0
— 2, 1, — 1, 0	— 1, 2, 1, 0	— 1, 1, 0, 2
0, 1 1, — 2	1 0, 1, 2	— 1, — 1, — 2, 0
1, 0, — 2, — 1	2, 1, 0, — 1	2, 0, — 1, 1
— 1, — 2, 0, — 1	0, — 1, 2, — 1	0, — 2, 1, 1
1, 2, 0, 1	0, 1, — 2, 1	0, 2, — 1, — 1
— 1, 0, 2, 1	— 2, — 1, 0, 1	— 2, 0, 1, — 1

und projicieren diese 24 Punkte in die Richtung der Achse z_4 auf den Raum $Z_1 Z_2 Z_3$. Zur Bestimmung der gegenseitigen Lage der Projectionen geben wir erst in der Ebene $Z_1 Z_2$ (Fig. 13) die Coordinaten z_1 und z_2 der Punkte an, indem z_3 als cotierte Coordinate hinzugefügt wird. Daraus leiten wir ab, dass die 24 Punkte gelagert sind in den fünf Ebenen, für welche z_3 nach einander die Werte $= -2, -1, 0, 1, 2$ hat, und diese Ebenen (Fig. 14) respective 3, 6, 6, 6, 3 der Punkte enthalten. Schneidet man die fünf von diesen Punktgruppen eingeschlossenen Gebilde (zwei gleichschenkelige Dreiecke, zwei gleichschenkelige Trapezia und ein Sechseck) von Pappendeckel aus und steckt man sie in der richtigen Weise mit ihren auf der z_3 Achse liegenden Punkten an eine Stricknadel, so erblickt man bald, dass die 24 Punkte sich auf einfachere Weise in drei parallelen Ebenen lagern, die respective 6, 12, 6 Punkte aufnehmen. Hierauf beziehen sich die Andeutungen

$$(a\,b\,c\,d\,e\,f),\quad (a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1),\quad (a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 f_2),\quad (p\,q\,r\,s\,t\,u)$$

in der räumlichen Projection und in einem neuen Grundrisse (Fig. 15). Jedes dieser vier Gebilde ist ein regelmässiges Sechseck; das erste, zweite und dritte sind einanders senkrechte Projectionen in der Richtung der gemeinschaftlichen Perpendikeln der drei Ebenen. Das vierte liegt in der Mittelebene und hat in Bezug auf das erste eine sehr einfache Lage. Löst man $(p\,q\,r\,s\,t\,u)$ den Eckpunkten nach in zwei gleichseitige Dreiecke auf, so ist $(a\,b\,c\,d\,e\,f)$ der gemeinschaftliche Teil dieser Dreiecke. So findet man die Gestalt des Projectionskörpers (Fig. 16), welcher von 26 Ebenen begrenzt wird und 18 Eckpunkte hat. Es ist die Seitenlänge der drei gleichen Sechsecke $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$, jene des grösseren a und die ganze Höhe $a\sqrt{2}$ *).

Ist das gefundene Resultat richtig, dann muss der Körper auch die 24 octaederförmigen Gebilde liefern können. Weil er zwei von Dreiecken verschiedenen Seitenflächen hat, nl. die parallelen Grundebenen, muss er sich auf zwei verschiedene Weisen in elf solche Teile zerstücken lassen. Eine von diesen zeigt Fig. 17, die andere Fig. 18. Es deuten in den beiden Figuren die kleineren Sechsecke die Grundebenen, das grössere Sechseck den Mittelschnitt an und nun

*) Wird der Projectionskorper cotiert, so findet man:

$$0 \text{ bei } p_1 q_1 r_1 s_1 t_1,\quad 1 \text{ bei } a_1, c_1, e_1,\ a_2, c_2, e_2,\quad 2 \text{ bei } b, d, f,$$

$$-1 \text{ bei } b_1, d_1, f_1,\ b_2, d_2, f_2,\quad -2 \text{ bei } a, c, e.$$

zählt man z. B. in Fig. 17 unmittelbar die 11 Octaeder ab, nl.:

$$(b_1\, d_1\, f_1,\ e\, a\, c)\,,\quad (d_1\, e_1\, f_1,\ t\, e\, s)\,,\quad (f_1\, a_1\, b_1,\ p\, a\, u)\,,\quad (b_1\, c_1\, d_1,\ r\, c\, q),$$

$$(b_2\, d_2\, f_2,\ e\, a\, c)\,,\quad (d_2\, e_2\, f_2,\ t\, e\, s),\quad (f_2\, a_2\, b_2,\ p\, a\, u)\,,\quad (b_2\, c_2\, d_2,\ r\, c\, q),$$

$$(b_1\, b_2,\ a\, c\, q\, p)\,,\quad (d_1\, d_2,\ c\, e\, s\, r),\quad (f_1\, f_2,\ e\, a\, u\, t).$$

Bestimmen wir wieder die Polarfigur des erhaltenen Körpers in Bezug auf die Hypersphere mit dem Radius $\frac{1}{2}a\sqrt{8}$, so finden wir den Schnitt des Z^{24}_a mit dem Mittelraume senkrecht zu einer ersten Querlinie. So erhält man einen Körper (Fig. 19), welcher 26 Eckpunkte und 18 Seitenflächen hat. Man findet $a\,a_1 = b\,b_1 = \ldots = \frac{2}{3}a$, $p\,p_1 = q\,q_1 = \ldots = a$, $a\,d = b\,e = c\,f = \frac{2}{3}a\sqrt{6}$, $z\,z' = 2\,a$.

ERKLÄRUNG DER TAFEL.

Fig. 1. Der Würfel (schwarz) als Projection des Sechszehnzelles auf den Raum entweder des Tetraeders $P\,Q\,R\,S$ (rot) oder des Tetraeders $P'\,Q'\,R'\,S'$ (blau). Zerlegung des Würfels $(P\,P')$ den Eckpunkten nach und des Octaeders $(A\,B\,C,\ A'\,B'\,C')$ den Seitenflächen nach in zwei Tetraeder.

Fig. 2. Die Combination von Würfel und Octaeder in Gleichgewicht (blau) als Projection des Vierundzwanzigzelles auf den Raum einer der begrenzenden Octaeder (rot) und als Schnitt des Vierundzwanzigzelles mit dem parallelen Mittelraume. Zergliederung der genannten Combination in neun Octaeder.

Fig. 3. Berechnung der Längen in der vierten Dimension mittels der körperlichen Projection.

Fig. 4 Umbildung des in Fig. 2 gegebenen Schnittes bei paralleler Verschiebung des Schnittraumes.

Fig. 5. Parallel-perspectivisches Bild des Vierundzwanzigzelles mittels schiefer Projection auf den die Combination von Würfel und Octaeder (blau) enthaltenden Mittelraum. Abbildung der übrigen Kanten (rot).

Fig. 6. Das Rhombendodekaeder (blau) als senkrechte Projection des Vierundzwanzigzelles in der Richtung einer Zelldiagonale und als Schnitt mit dem Mittelraume senkrecht auf einer Zelldiagonale. Bei der Projection treten die Eckpunkte des Würfels (rot) und der Mittelpunkt zweimal auf. Zergliederung des Rhombendodekaeders in sechs Octaeder.

Fig. 7. Umbildung des in Fig. 6 gegebenen Schnittes bei paralleler Verschiebung des Schnittraumes. Es werden die Octaederecken (rot) des Körpers (blau) vom Würfel abgestumpft.

Fig. 8. Parallel-perspectivisches Bild des Vierundzwanzigzelles mittels schiefer Projection auf den Schnittraum der Fig. 6. Der Würfel wird zum Achtzelle (rot). Eins der begrenzenden Octaeder (blau) ist angegeben.

Fig. 9. Das Achtzell (schwarz) mit seinen acht Zelldiagonalen, welche zwei Systeme (das rote und das blaue) von rechtwinkligen Achsen bilden. Zerlegung des Achtzelles den Eckpunkten nach in zwei Sechszehnzelle (rot und blau).

Fig. 10. Das von zwei sechsseitigen Pyramiden abgeschlossene sechsseitige Prisma (blau) als senkrechte Projection des Vierundzwanzigzelles in der Richtung einer ersten Querlinie. Die Eckpunkte werden geliefert vom durch Grundebenen abgeschlossenen Prisma mit den doppeltzählenden Mittelpunkten der Grundebenen und einer Doppelpyramide (rot).

Fig. 11. Zergliederung des Projectionskörpers von Fig. 10 in neun Octaeder, von denen das obere (Fig. 11^a), mittlere (Fig. 11^b) und untere (Fig. 11^c) Stück je drei enthalten

Fig. 12. Die abgestumpfte Doppelpyramide als Schnitt des Vierundzwanzigzelles mit dem Mittelraume senkrecht auf einer zweiten Querlinie.

Fig. 13. Grundriss eines neuen Projectionskörpers, welchen man bei Projection in der Richtung einer zweiten Querlinie erhält..

Fig. 14. Räumliche Lage der 24 Eckpunkte des neuen Projectionskörpers von Fig. 13 in fünf parallelen Ebenen.

Fig. 15. Andere Anordnung dieser Punkte als Eckpunkte von vier Sechsecken (drei rote und ein blaues).

Fig. 16. Die in den Fig. 13, 14, 15 erzielte Projection des Vierundzwanzigzelles in der Richtung einer zweiten Querlinie (blau). Auf der Oberfläche des inneren Prismas (rot) liegen 18 der 24 Eckpunkte.

Fig. 17 und 18. Zergliederung des Projectionskörpers von Fig. 16 auf zwei verschiedene Weisen in elf Octaeder.

Fig. 19. Schnitt des Vierundzwanzigzelles mit dem Mittelraume senkrecht auf einer ersten Querlinie.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 6.
Fig. 10.
Fig. 12.
Fig. 16.
Fig. 5.
Fig. 3.
Fig. 7.
Fig. 11a
Fig. 13.
Fig. 17.
Fig. 14.
Fig. 18.
Fig. 11b
Fig. 9.
Fig. 8.
Fig. 19.
Fig. 11c
Fig. 15.

BOEKDRUKKERIJ
De Roever Kröber-Bakels.
AMSTERDAM.

OVER DE

TOEPASSING DER QUATERNIONEN

OP DE

MECHANICA EN DE NATUURKUNDE

DOOR

P. MOLENBROEK.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

DEEL II. No. 3.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1893.

OVER DE

TOEPASSING DER QUATERNIONEN

OP DE

MECHANICA EN DE NATUURKUNDE

DOOR

P. MOLENBROEK.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

DEEL II. No. 3.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1893.

OVER DE

TOEPASSING DER QUATERNIONEN

OP DE

MECHANICA EN DE NATUURKUNDE

DOOR

P. MOLENBROEK.

1. De operator ∇ komt in de toepassingen, door HAMILTON van zijne theorie der quaternionen gemaakt, slechts enkele malen voor. Wel vestigde hij in zijne „Lectures on Quaternions" (§ 620) bijzonder de aandacht op dit symbool met het oog op de bruikbaarheid bij natuurkundige toepassingen, maar een uitwerking van dit denkbeeld heeft hij niet in het licht gegeven. Toch schijnt dit zijn voornemen geweest te zijn; althans in de bekende verhandeling van TAIT „On Green's and other allied theorems" (Trans. of the R. Soc. of Ed. Vol. 26, 1870) zegt de schrijver: „In one of the last letters I received from him (HAMILTON), he said, that he intended to conclude the final chapter of his „Elements", which is devoted to physical applications, by some sections on the operator mentioned above".

Vooral door TAIT is uitvoeriger de beteekenis van dien operator uiteengezet in eenige verhandelingen en in zijn bekend werk „An elementary treatise on quaternions", waar dit over de leer van de elasticiteit, de potentiaal en de electriciteit handelt. Er zijn daarbij twee gevallen te onderscheiden, naarmate ∇ aan een scalaire functie f van een vector ϱ, of aan een vectorfunctie σ van ϱ werkt. In het eerste geval hebben ∇f en $\nabla^2 f$, in het laatste $S\nabla\sigma$ en $V\nabla\sigma$ eene eigenaardige beteekenis, die bij vraagstukken op het gebied, dat wij zooeven omschreven, duidelijk aan het licht treedt. Tot heden zijn dan ook steeds de genoemde theorieën aan de hand dier symbolen ontwikkeld: zoo b.v. in HICKS' „Quaternioninvestigations on

strains and fluid motion" (Quarterly Journal Vol. 14 p. 271, 1877). Toch doet zich daarbij het belangrijk bezwaar gelden, dat in de quaternionentheorie geen methoden bekend zijn, die bij transformaties van dien operator ∇ dienst kunnen doen, zoodat men dan ook, als een dergelijke transformatie vereischt wordt, steeds tot een overgang tot Cartesische coördinaten zijne toevlucht nemen moet. TAIT zelf drukt dit gevoelen uit, waar hij in de genoemde verhandeling zegt, dat zijne methode weinig „direct" is. Dientengevolge is de vorm, waarin hij de vraagstukken over de hydrodynamica behandelt, gelijk aan die in de gewone rekenwijze, zoodanig zelfs, dat de beweging van een vloeistof bij aanname van een snelheidspotentiaal volgens de beide methoden behandeld eenvoudig niet het geringste verschil vertoont. Het behoeft wel geen betoog, dat daardoor aan de invoering van quaternionen in zoodanige gevallen nagenoeg geen voordeelen verbonden zijn.

Sedert langeren tijd heeft zich de overtuiging bij mij gevestigd, dat de toepassing van HAMILTON's methode op de mechanica en de natuurkunde op geheel andere wijze moet plaats hebben, dan tot heden geschied is, hetgeen ik in deze verhandeling wensch aan te toonen. Het zal daarbij blijken, dat wij den operator ∇ slechts in het eenvoudige geval te beschouwen hebben, waarin hij aan een scalaire functie van ϱ werkt, waarbij dan het resultaat der operatie ook onmiddellijk, zooals bekend is, door een gewone quaterniondifferentiatie te voorschijn treedt. Het zwaartepunt der verdere beschouwingen ligt in de toepassing der lineaire vectorfunctie, die door HAMILTON blijkens de uitvoerigheid, waarmede hij hare eigenschappen ontwikkeld heeft, zonder twijfel als het meest belangrijke symbool zijner theorie herkend is.

Een overgang tot Cartesische coördinaten is bij geen der menigvuldig voorkomende transformaties wenschelijk gebleken. Ik aarzel dan ook niet, den in het volgende afgeleiden vorm der behandelde vraagstukken in tegenstelling met dien, welken men bij TAIT vindt, met den naam van den *waren* quaternionvorm te bestempelen. De verrassende eenvoudigheid der verkregene vergelijkingen opent het uitzicht eenige tot heden onopgeloste vraagstukken van een geheel nieuw standpunt uit aan te vatten. Voor de theorie der vloeistofstralen heeft deze beschouwingswijze mij tot een, naar ik meen, nieuw theorema gevoerd.

2. Aangezien de theorie der quaternionen tot heden nog betrekkelijk weinig beoefend wordt, zullen wij de grondslagen voor de navolgende beschouwingen hier zooveel mogelijk in herinnering brengen. Daarbij zal ik menigmaal naar de speciale werken op dit

gebied moeten verwijzen, waartoe ik gekozen heb: TAIT, „An elementary treatise on quaternions" en mijne „Theorie der Quaternionen."

Wanneer men den vector ϱ van een willekeurig punt in de ruimte volgens drie vaste vectoren α, β, γ ontbindt, verkrijgt men

$$\varrho = x\alpha + y\beta + z\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en door operatie met $S.\beta\gamma$, $S.\gamma\alpha$, $S.\alpha\beta$ ontstaat hieruit achtereenvolgens

$$x = \frac{S\beta\gamma\varrho}{S\alpha\beta\gamma}, \; y = \frac{S\gamma\alpha\varrho}{S\alpha\beta\gamma}, \; z = \frac{S\alpha\beta\varrho}{S\alpha\beta\gamma},$$

waardoor uit (1) de fundamenteele betrekking verkregen wordt

$$\varrho S\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma\varrho + \beta S\gamma\alpha\varrho + \gamma S\alpha\beta\varrho \quad . \quad . \quad . \quad (1^*)$$

Stelt men nu ter bekorting

$$\frac{V\beta\gamma}{S\alpha\beta\gamma} = \alpha_1, \; \frac{V\gamma\alpha}{S\alpha\beta\gamma} = \alpha_2, \; \frac{V\alpha\beta}{S\alpha\beta\gamma} = \alpha_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

dan gaan deze betrekkingen over in

$$x = S\alpha_1\varrho, \; y = S\alpha_2\varrho, \; z = S\alpha_3\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

derhalve

$$\varrho = \alpha S\alpha_1\varrho + \beta S\alpha_2\varrho + \gamma S\alpha_3\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Men kan ϱ echter ook ontbinden volgens de drie vectoren $V\beta\gamma$, $V\gamma\alpha$, $V\alpha\beta$, die op de vlakken door α, β, γ twee aan twee gebracht, loodrecht staan en verkrijgt dan

$$\varrho = u\,V\beta\gamma + v\,V\gamma\alpha + w\,V\alpha\beta,$$

waaruit door operatie met $S.\alpha$, $S.\beta$, $S.\gamma$ achtereenvolgens ontstaat

$$u = \frac{S\alpha\varrho}{S\alpha\beta\gamma}, \; v = \frac{S\beta\varrho}{S\alpha\beta\gamma}, \; w = \frac{S\gamma\varrho}{S\alpha\beta\gamma},$$

welke vergelijkingen met de vorige weder de belangrijke formule opleveren

$$\varrho S\alpha\beta\gamma = V\beta\gamma S\alpha\varrho + V\gamma\alpha S\beta\varrho + V\alpha\beta S\gamma\varrho \quad . \quad . \quad (4^*)$$

en in verband met (2) verkrijgt men tevens

$$\varrho = \alpha_1 S\alpha\varrho + \alpha_2 S\beta\varrho + \alpha_3 S\gamma\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Een willekeurige functie van x, y, z, die wij door F aanduiden, gaat door de betrekkingen (3) over in

$$F(S\alpha_1\varrho,\ S\alpha_2\varrho,\ S\alpha_3\varrho),$$

hetgeen Hamilton een scalaire functie van den vector ϱ van een punt genoemd heeft, waarvoor wij in het volgende kortheidshalve $F\varrho$ zullen schrijven.

Duidt men de partieele differentiaalquotienten van de functie $F\varrho$ naar de argumenten $S\alpha_1\varrho$, $S\alpha_2\varrho$, $S\alpha_3\varrho$ door F_1, F_2, F_3 aan, dan levert een differentiatie van die functie

$$\begin{aligned} dF &= F_1 S\alpha_1 d\varrho + F_2 S\alpha_2 d\varrho + F_3 S\alpha_3 d\varrho \\ &= S\nu d\varrho, \end{aligned}$$

waarin ν geschreven is in de beteekenis

$$\nu = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3.$$

Vormt men nu eveneens het differentiaal $d\nu$, waarbij algemeen door F_{ik} het tweede partieele differentiaalquotient van $F\varrho$ naar de beide argumenten $S\alpha_i\varrho$, $S\alpha_k\varrho$ worde voorgesteld, dan ontstaat

$$\begin{aligned} d\nu = \alpha_1 S(\alpha_1 F_{11} + \alpha_2 F_{12} + \alpha_3 F_{13}) d\varrho + \alpha_2 S(\alpha_1 F_{12} + \alpha_2 F_{22} + \alpha_3 F_{23})\, d\varrho + \\ + \alpha_3 S(\alpha_1 F_{13} + \alpha_2 F_{23} + \alpha_3 F_{33})\, d\varrho. \end{aligned}$$

Deze uitdrukking kan verkort geschreven worden in den vorm

$$d\nu = \varphi_0 d\varrho = \alpha_1 S\nu_1 d\varrho + \alpha_2 S\nu_2 d\varrho + \alpha_3 S\nu_3 d\varrho \quad . \quad . \quad (6)$$

Zij is een lineaire vectorfunctie van $d\varrho$, door Hamilton in §§ 346—365 van zijne „Elements of quaternions" beschouwd en wel verschijnt deze hier in den drietermigen grondvorm [1]).

3. Het is bekend, dat de lineaire vectorfunctie $\psi\varrho$ gedefinieerd kan worden door de fundamenteele eigenschap, die in de volgende vergelijking opgesloten ligt,

$$\psi\varrho + \psi\sigma = \psi(\varrho + \sigma).$$

Zij sluit tevens de betrekking in

$$\psi(x\varrho) = x\psi\varrho,$$

[1]) Vergelijk Tait, Chapt. V § 160; Molenbroek, Sechster Abschn. § 158.

als x een willekeurig scalair getal voorstelt. Hieruit kan nu onmiddellijk de drietermige grondvorm voor die functie worden afgeleid. Immers met het oog op (4) heeft men

$$\begin{aligned}\psi\varrho &= \psi(\alpha\, S\alpha_1\varrho + \beta\, S\alpha_2\varrho + \gamma\, S\alpha_3\varrho)\\ &= \psi\alpha\,.\,S\alpha_1\varrho + \psi\beta\,.\,S\alpha_2\varrho + \psi\gamma\,.\,S\alpha_3\varrho;\end{aligned}$$

of, als men

$$\psi\alpha = \gamma_1,\quad \psi\beta = \gamma_2,\quad \psi\gamma = \gamma_3 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

stelt, dan is

$$\psi\varrho = \gamma_1 S\alpha_1\varrho + \gamma_2 S\alpha_2\varrho + \gamma_3 S\alpha_3\varrho\,. \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Bij elke lineaire vectorfunctie $\psi\varrho$ behoort een verwante functie $\psi'\varrho$, die gedefinieerd kan worden door de betrekking

$$S.\,\sigma\psi\varrho = S.\,\varrho\psi'\sigma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

voor alle waarden der vectoren ϱ en σ geldende. Uit (5) volgt dan

$$\begin{aligned}\psi'\varrho &= \alpha_1\, S\alpha\psi'\varrho + \alpha_2\, S\beta\psi'\varrho + \alpha_3\, S\gamma\psi'\varrho\\ &= \alpha_1\, S\varrho\psi\alpha + \alpha_2\, S\varrho\psi\beta + \alpha_3\, S\varrho\psi\gamma\end{aligned}$$

dus

$$\psi'\varrho = \alpha_1\, S\gamma_1\varrho + \alpha_2\, S\gamma_2\varrho + \alpha_3\, S\gamma_3\varrho \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

zoodat $\psi'\varrho$ eenvoudig uit $\psi\varrho$ ontstaat, door daarin de grootheden α en γ met elkander te verwisselen.

Blijft daarbij de functie onveranderd, dan noemt HAMILTON haar zelfverwant.

De som $\psi\varrho + \psi'\varrho$ of kortheidshalve $(\psi + \psi')\varrho$ is natuurlijk steeds eene zelfverwante functie, die wij door $2\,\psi_0\varrho$ voorstellen, dus

$$\psi\varrho + \psi'\varrho = 2\,\psi_0\varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Maar uit de vergelijking (8) volgt

$$S\varrho\psi\varrho = S\varrho\psi'\varrho \text{ of } S.\,\varrho(\psi - \psi')\varrho = 0,$$

d.i. $(\psi - \psi')\varrho$ is een vector, die loodrecht staat op ϱ. Is nu δ een willekeurige vector, dan is $V\delta\varrho$ een vector loodrecht op het vlak van δ en ϱ en men kan dus stellen

$$\psi\varrho - \psi'\varrho = 2\,V\delta\varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Uit deze vergelijking en (10) volgen nu de belangrijke betrekkingen [1])

---

[1]) Verg. TAIT, § 174; MOLENBROEK, § 161.

$$\left.\begin{array}{l}\psi\varrho = \psi_0\varrho + V\delta\varrho \\ \psi'\varrho = \psi_0\varrho - V\delta\varrho\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Den hier ingevoerden vector δ zullen wij in het vervolg den *rotatievector* van de functie ψ noemen. Het is gemakkelijk dezen in de grootheden α en γ uittedrukken, want volgens (11) in verband met (8) en (10) is

$$\begin{aligned}2V\delta\varrho &= (\gamma_1 S\alpha_1\varrho - \alpha_1 S\gamma_1\varrho) + (\gamma_2 S\alpha_2\varrho - \alpha_2 S\gamma_2\varrho) + (\gamma_3 S\alpha_3\varrho - \alpha_3 S\gamma_3\varrho) \\ &= V.\varrho V(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3)\ {}^{1)}\end{aligned}$$

derhalve

$$\delta = \tfrac{1}{2} V(\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3) \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

een betrekking, die ten gevolge van (7) en (2) ook aldus kan geschreven worden

$$2\delta S\alpha\beta\gamma = V(\psi\alpha.V\beta\gamma + \psi\beta.V\gamma\alpha + \psi\gamma.V\alpha\beta) \quad . \quad (14^*)$$

De voorwaarde, waaraan voldaan moet worden, opdat de functie ψ zelfverwant is, kan natuurlijk ook in dezen vorm uitgesproken worden, dat zij geen rotatievector δ bevat.

De merkwaardigste eigenschap van de lineaire vectorfunctie is ongetwijfeld, dat zij steeds aan een symbolische cubische vergelijking voldoet. Het zou te ver voeren bij de afleiding dezer vergelijking hier stil te staan.[2]) Wij zullen deze vergelijking in het vervolg voor de functie ψ steeds in den vorm aanwenden

$$x\varrho - x_1\psi\varrho + x_2\psi^2\varrho - \psi^3\varrho = 0,$$

waarin $\psi^2\varrho$ voor $\psi(\psi\varrho)$ staat, terwijl x, x_1, x_2 getallen zijn, die op eenvoudige wijze met de functie ψ samenhangen, namelijk in het algemeen

$$\left.\begin{aligned}x &= \frac{S.\psi'\varkappa\,\psi'\lambda\,\psi'\mu}{S.\varkappa\lambda\mu} \\ x_1 &= \frac{S(\varkappa\,\psi'\lambda\,\psi'\mu + \lambda\,\psi'\mu\,\psi'\varkappa + \mu\,\psi'\varkappa\,\psi'\lambda)}{S.\varkappa\lambda\mu} \\ x_2 &= \frac{S(\lambda\mu\,\psi'\varkappa + \mu\varkappa\,\psi'\lambda + \varkappa\lambda\,\psi'\mu)}{S.\varkappa\lambda\mu}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (15)$$

---

1) TAIT, § 90; MOLENBROEK, § 87, vergelijking (c. 40).

2) Men zie TAIT, § 145 en vlg.; MOLENBROEK, § 143 en vlg.

$\varkappa$, λ, μ, zijn hierin drie willekeurige vectoren. Wanneer men voor ψ den drietermigen grondvorm aanneemt, dan is [1])

$$\left.\begin{aligned} x &= S\alpha_1\alpha_2\alpha_3\, S\gamma_3\gamma_2\gamma_1 \\ x_1 &= -\,S(V\alpha_2\alpha_3\, V\gamma_2\gamma_3 + V\alpha_3\alpha_1\, V\gamma_3\gamma_1 + V\alpha_1\alpha_2\, V\gamma_1\gamma_2) \\ x_2 &= S(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (16)$$

zoodat deze drie grootheden voor de functie ψ en hare verwante dezelfde waarde hebben; men mag derhalve ook in (15) de functie ψ' overal door ψ vervangen. In het volgende zullen wij x, x_1, x_2 de invarianten der lineaire vectorfunctie noemen.

4. Wij zetten nu de beschouwingen van § 2 voort. Daarin werd gevonden, dat $d\nu$ een lineaire vectorfunctie van $d\varrho$ is; het blijkt nu gemakkelijk, dat deze onveranderd blijft, als men de grootheden α en ν (vergelijking (6)) verwisselt, zoodat $d\nu$ steeds zelfverwant is. Daarbij was ondersteld

$$\nu_1 = \alpha_1 F_{11} + \alpha_2 F_{12} + \alpha_3 F_{13}, \ \nu_2 = \alpha_1 F_{12} + \alpha_2 F_{22} + \alpha_3 F_{23}, \text{ enz.}$$

Een nieuwe differentiatie doet nu onmiddellijk inzien, dat $d\nu_1$, $d\nu_2$, $d\nu_3$ ook zelfverwante lineaire vectorfuncties van $d\varrho$ zijn zullen.

Een vector σ, volgens drie vaste vectoren α_1, α_2, α_3 in de ruimte ontbonden, levert

$$\sigma = u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + u_3\alpha_3,$$

waarin u_1, u_2, u_3 drie scalaire grootheden zijn. Hangt σ nu op een of met andere wijze met ϱ samen, dan openbaart zich dit hierin, dat u_1, u_2, u_3 scalaire functies van ϱ zijn, die wij door $F'\varrho$, $F''\varrho$, $F'''\varrho$ aanduiden. De uitdrukking

$$\sigma = \alpha_1 F'\varrho + \alpha_2 F''\varrho + \alpha_3 F'''\varrho$$

is dan de meest algemeene uitdrukking voor een *vector*functie van ϱ.

Het differentiaal $d\sigma$ verkrijgt volgens § 2 den vorm

$$d\sigma = \alpha_1 S\nu' d\varrho + \alpha_2 S\nu'' d\varrho + \alpha_3 S\nu''' d\varrho \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

het is dus een lineaire vectorfunctie $d\varrho$, die nu echter in het algemeen niet zelfverwant zijn zal en dus tot den vorm (13) herleid zal kunnen worden

$$d\varrho = \psi\, d\varrho = \psi_0\, d\varrho + V\delta\, d\varrho,$$

[1]) Verg. TAIT, § 160; MOLENBROEK, Zusätze zur Theorie d. Q. blz. 7.

waarin δ de waarde heeft

$$\delta = \tfrac{1}{2} V(\alpha_1 \nu' + \alpha_2 \nu'' + \alpha_3 \nu''').$$

Voor het volgende is het nu noodig nog eenige oogenblikken bij het differentiaal $d\delta$ stil te staan. Het zal namelijk blijken, dat, indien σ een volkomen willekeurige vectorfunctie van ϱ is, δ toch aan een bepaalde voorwaarde voldoen moet, die wij aldus opsporen. Men stelle

$$d\nu' = \chi_1 d\varrho, \quad d\nu'' = \chi_2 d\varrho, \quad d\nu''' = \chi_3 d\varrho,$$

dan zijn volgens het begin dezer § χ_1, χ_2, χ_3 zelfverwante lineaire vectorfuncties. Aangezien δ een vectorfunctie van ϱ is, zoo zal $d\delta$ een *niet*-zelfverwante lineaire vectorfunctie van $d\varrho$ zijn, die wij door $\chi d\varrho$ voorstellen, zoodat de betrekking geldt

$$2\delta = 2\chi d\varrho = V(\alpha_1 \chi' d\varrho + \alpha_2 \chi'' d\varrho + \alpha_3 \chi''' d\varrho).$$

Bepaalt men nu voor de functie χ met behulp van een der formules (15), nadat daarin de verwante functie door de oorspronkelijke vervangen is, de invariant x_2, aldus

$$x_2 S\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = S(\alpha_2\alpha_3\chi\alpha_1 + \alpha_3\alpha_1\chi\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2\chi\alpha_3),$$

dan vindt men

$$x_2 = 0.$$

Deze is de bovengenoemde voorwaarde, waaraan de rotatievector δ van een lineaire vectorfunctie van $d\varrho$, uit elke willekeurige vectorfunctie afgeleid, voldoen moet.

Wanneer in elk punt der ruimte voor een lineaire vectorfunctie de invariant x_2 verdwijnt, dan kan daaruit nog een besluit getrokken worden, dat ons later ten nutte komen zal. Zij namelijk die lineaire vectorfunctie ondersteld in den vorm (17) gegeven te zijn, dan is

$$x_2 = S(\alpha_1 \nu' + \alpha_2 \nu'' + \alpha_3 \nu''').$$

Bijaldien nu deze grootheid overal verdwijnt, dan volgt door differentiatie met de hierboven toegepaste schrijfwijze voor $d\nu'$, $d\nu''$, $d\nu'''$

$$S(\chi_1\alpha_1 + \chi_2\alpha_2 + \chi_3\alpha_3) d\varrho = 0.$$

Daar deze betrekking voor elke waarde van $d\varrho$ gelden moet, zoo besluit men hieruit, dat ook in elk punt der ruimte de vergelijking

$$\chi_1\alpha_1 + \chi_2\alpha_2 + \chi_3\alpha_3 = 0$$

geldig zijn zal.

Wij zullen nu het eerst nagaan, welken vorm eenige bekende stellingen uit de potentiaaltheorie aannemen. Voor de afleiding van al het navolgende blijkt een overgang tot Cartesische coördinaten steeds onnoodig.

Theorie van de potentiaal.

5. Zij σ de vektor van een punt, waar een volume-element dv van een massa met dichtheid m zich bevindt. De potentiaal in het punt ϱ is dan

$$F\varrho = \int \frac{m\,dv}{T(\varrho-\sigma)}\,.$$

De verandering van deze, als men naar het zeer nabijgelegen punt $\varrho + x\,d\varrho$ overgaat, is [1])

$$x\,dF\varrho = x \int \frac{m\,dv}{T(\varrho-\sigma)^3}\,S(\varrho-\sigma)\,d\varrho\,,$$

zoodat de uitdrukking voor de kracht in het punt ϱ wordt

$$\varkappa = -\int \frac{m\,dv}{T(\varrho-\sigma)^3}\,(\varrho-\sigma)\,.$$

Hieruit verkrijgt men nu de zelfverwante lineaire vectorfunctie

$$d\varkappa = \varphi_0\,d\varrho = -\int \left[\frac{d\varrho}{T(\varrho-\sigma)^3} + 3\,\frac{S(\varrho-\sigma)\,d\varrho}{T(\varrho-\sigma)^5}\,(\varrho-\sigma)\right] m\,dv.$$

Wanneer men daarvoor de invariant x_2 bepaalt volgens (2), vindt men

$$x_2 = 0,$$

zijnde de ware quaternionvorm van de vergelijking van Laplace.

Om de vergelijking van Poisson af te leiden, volgen wij een door Dirichlet aangegeven methode. Denken wij om het punt ϱ_0, binnen de massa gelegen, een bolletje beschreven en berekenen wij de waarde van x_2 in een daarbinnen gelegen punt ϱ, welke het gevolg is van de werking der massa binnen dat boloppervlak gelegen. De kracht in het punt ϱ, welke eenvoudig gelijk is aan de werking van de massa binnen het bolopperviak met den straal $T(\varrho - \varrho_0)$ beschreven, wordt dan

[1]) Tait, § 133; Molenbroek, § 118, vergelijking (e. 22).

$$\varkappa = \frac{4}{3}\pi m(\varrho - \varrho_0),$$

derhalve

$$d\varkappa = \varphi_0 d\varrho = -\frac{4}{3}\pi m \, d\varrho,$$

zoodat nu de berekening van x_2 voor de functie φ_0 levert

$$x_2 = -4\pi m, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

de vergelijking van POISSON.

Wij hebben hierdoor tevens een zeer merkwaardigen vorm gevonden voor een partieele differentiaalvergelijking van de tweede orde. Dit onderwerp is in mijne „Anwendung der Quaternionen auf die Geometrie," welke weldra het licht zien zal, meer uitvoerig beschouwd, alwaar dan ook eenige algemeene integratiemethoden voor zoodanige vergelijkingen aangegeven zijn.

6. In verband met het voorgaande verkrijgt nu ook het theorema van GREEN een eigenaardigen vorm. Stellen wij door $F\varrho$ en $f\varrho$ twee scalaire functies van ϱ voor, zoodanig dat

$$dF = SK d\varrho, \quad df = S\varkappa d\varrho$$

$$dK = \Phi d\varrho, \quad d\varkappa = \varphi d\varrho,$$

terwijl X_2 en x_2 de bekende grootheden voor de functies Φ en φ zijn mogen.

Wanneer nu verder $d\varrho_1$, $d\varrho_2$, $d\varrho_3$ drie oneindig kleine vectoren voorstellen, die een volume-element

$$dv = S d\varrho_1 d\varrho_2 d\varrho_3$$

bepalen, en wij deze in het vervolg steeds zoodanig geconstrueerd denken, dat de draaiing van $d\varrho_2$ naar $d\varrho_3$ van $d\varrho_1$ uitgezien, tegengesteld is aan de beweging der wijzers van een uurwerk, terwijl hetzelfde bij een cyclische verwisseling van $d\varrho_1, d\varrho_2, d\varrho_3$ geldig blijft, dan is volgens (1*)

$$SK\varkappa \, S d\varrho_1 d\varrho_2 d\varrho_3 =$$
$$= S\,.\,K(d\varrho_1 S d\varrho_2 d\varrho_3 \varkappa + d\varrho_2 S d\varrho_3 d\varrho_1 \varkappa + d\varrho_3 S d\varrho_1 d\varrho_2 \varkappa).$$

Duidt men door $d_1 F$ de verandering van F aan, als ϱ in $\varrho + d\varrho_1$ overgaat, dan geldt voor den term $SK d\varrho_1 S d\varrho_2 d\varrho_3 \varkappa$ van het tweede lid der vorige vergelijking

$$S\,K d\varrho_1 S\,d\varrho_2 d\varrho_3 \varkappa = d_1 [F S\,d\varrho_2 d\varrho_3 \varkappa] - F S\,d\varrho_2 d\varrho_3 \varphi\, d\varrho_1.$$

Wanneer dus de drievoudige integraal

$$\iiint S\,K\varkappa\,dv$$

wordt uitgestrekt over een begrensde ruimte, die door drie stelsels van evenwijdige platte vlakken in kleine parallelepipeda verdeeld wordt, welker ribben evenwijdig aan $d\varrho_1$, $d\varrho_2$, $d\varrho_3$ zijn, dan is een deel ervan

$$\iiint S\,K\,d\varrho_1\,S\,d\varrho_2\,d\varrho_3\,\varkappa = \iint F\,S\,d\varrho_2\,d\varrho_3\,\varkappa\Big|_i^u - \iiint F\,S\,d\varrho_2\,d\varrho_3\,\varphi\,d\varrho_1,$$

waar

$$F\,S\,d\varrho_2\,d\varrho_3\,\varkappa\Big|_i^u$$

aangeeft het verschil der waarden van $F\,S\,d\varrho_2\,d\varrho_3\,\varkappa$ in de punten, waar een prisma, op een vlakje $d\varrho_2$, $d\varrho_3$ met opstaande ribben evenwijdig aan $d\varrho_1$ geconstrueerd, het grensoppervlak der beschouwde ruimte snijdt en de dubbele integratie over alle zoodanige prisma's moet worden uitgestrekt. Derhalve wordt

$$\iiint S\,K\varkappa\,dv = \iint F\,S\,\varkappa\,(d\varrho_2\,d\varrho_3 + d\varrho_3\,d\varrho_1 + d\varrho_1\,d\varrho_2)$$

$$- \iiint F\,S\,(d\varrho_2\,d\varrho_3\,\varphi\,d\varrho_1 + d\varrho_3\,d\varrho_1\,\varphi\,d\varrho_2 + d\varrho_1\,d\varrho_2\,\varphi\,d\varrho_3).$$

Is nu ν de normaal tot het oppervlak naar buiten getrokken, dan is

$$\begin{aligned} V(d\varrho_2\,d\varrho_3 + d\varrho_3\,d\varrho_1 + d\varrho_1\,d\varrho_2) &= \\ &= U\,V(d\varrho_2 - d\varrho_1)(d\varrho_3 - d\varrho_1)\,T\,V(d\varrho_2 - d\varrho_1)(d\varrho_3 - d\varrho_1) \\ &= U\nu\;do, \end{aligned}$$

waarin do het element van het oppervlak voorstelt door een der prisma's uitgesneden [1]). Derhalve wordt het theorema van GREEN in algemeenen vorm

$$\iiint S\,K\varkappa\,dv = \iint F\,S\,\varkappa\;U\nu\;do - \iiint F\,x_2\,dv \quad . \;\; . \;\; . \;\; . \qquad (19)$$

---

[1]) TAIT, § 96; MOLENBROEK, § 86, formule (c. 33).

Voor één enkele functie f luidt het

$$\iiint \varkappa^2\, dv = \iint f S \varkappa\, U\nu\, do - \iiint f\, x_2\, dv.$$

Uitbreidingen van het theorema zijn in de theorie der quaternionen mogelijk. Wanneer namelijk $\varkappa$ niet van een scalaire functie is afgeleid, dan blijft toch $d\varkappa$ een lineaire vectorfunctie van $d\varrho$, al is deze dan niet zelfverwant. De vergelijking (19) zal dus ook in dit geval onveranderd geldig blijven.

Wanneer verder weder $F_1\varrho$, $F_2\varrho$, $F_3\varrho$ scalaire functies van ϱ voorstellen, dan zal

$$N = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3$$

een op bepaalde wijze in de ruimte verdeelde vectorgrootheid zijn. Is nu

$$dF_1 = S K_1\, d\varrho\,,\ dF_2 = S K_2\, d\varrho\,,\ dF_3 = S K_3\, d\varrho,$$

$$\alpha_1 S K_1\, d\varrho + \alpha_2 S K_2\, d\varrho + \alpha_3 S K_3\, d\varrho = \psi\, d\varrho,$$

dan kan men eerst de vergelijking (19) op elk der grootheden K_1, K_2, K_3 afzonderlijk toepassen. Vermenigvuldigt men daarna de aldus verkregen vergelijkingen achtereenvolgens met α_1, α_2, α_3 en telt de producten samen, dan ontstaat het theorema

$$\iiint \psi\, \varkappa\, dv = \iint N\, S\, \varkappa\, U\nu\, do - \iint x_2\, N\, dv \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Het is natuurlijk ook gemakkelijk deze stelling direct te bewijzen.

Met het oog op de hydrodynamica is het wenschelijk hier eenige beschouwingen omtrent de elasticiteitstheorie op te nemen. Ten deele is deze theorie reeds door Tait en andere schrijvers in den hier aangegeven vorm behandeld.

Elasticiteitstheorie.

7. Denkt men zich om het punt ϱ van een lichaam met een zeer kleinen straal r een bolletje beschreven, terwijl $\varrho + d\varrho$ de vektor van een punt van het oppervlak is, dan bestaat de betrekking

$$d\varrho^2 = -r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Nu moge het lichaam, waarvan dit bolletje deel uitmaakt, een verplaatsing met vervorming ondergaan, waardoor ϱ overgaat in σ en $\varrho + d\varrho$ in $\sigma + d\sigma$. Algemeen zij gesteld

$$\sigma = \alpha_1 F_1 \varrho + \alpha_2 F_2 \varrho + \alpha_3 F_3 \varrho$$

en dus

$$d\sigma = \chi d\varrho = \alpha_1 S \nu_1 d\varrho + \alpha_2 S \nu_2 d\varrho + \alpha_3 S \nu_3 d\varrho.$$

Hieruit volgt dan [1])

$$d\varrho = \chi^{-1} d\sigma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

en de vergelijking (21) geeft

$$(\chi^{-1} d\sigma)^2 = -r^2$$

of, als de tot χ^{-1} verwante functie door $(\chi^{-1})'$ aangeduid wordt, volgens (9)

$$S.\, d\sigma (\chi^{-1})' \chi^{-1} d\sigma = -r^2.$$

De functie $(\chi^{-1})' \chi^{-1}$, waarvoor wij kortheidshalve ψ schrijven, is steeds zelfverwant. Er blijkt dus, dat punten van het lichaam, die oorspronkelijk op een boloppervlak gelegen waren, na de verplaatsing een ellipsoïde vormen [2]). De assen van deze ellipsoïde

$$S.\, d\sigma \psi d\sigma = -r^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

vallen in de richtingen der eenheidsvektoren ι_1, ι_2, ι_3, welke aan de vergelijking

$$V \varrho \psi \varrho = 0$$

voldoen [3]). Zijn m_1, m_2, m_3 de wortels der symbolische cubische vergelijking voor de functie ψ

$$x - x_1 \psi + x_2 \psi^2 - \psi^3 = 0\,,$$

dan voldoen dus ι_1, ι_2, ι_3 aan de betrekkingen

$$\left.\begin{aligned} \psi \iota_1 &= (\chi^{-1})' \chi^{-1} \iota_1 = m_1 \iota_1 \\ \psi \iota_2 &= (\chi^{-1})' \chi^{-1} \iota_2 = m_2 \iota_2 \\ \psi \iota_3 &= (\chi^{-1})' \chi^{-1} \iota_3 = m_3 \iota_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

De richtingen ι_1, ι_2, ι_3 vielen voor de vervorming blijkens (22) met

$$\chi^{-1} \iota_1, \quad \chi^{-1} \iota_2, \quad \chi^{-1} \iota_3$$

samen, waaruit volgt, dat zij ook voor de vervorming onderling lood-

---

[1]) TAIT, § 139; MOLENBROEK, § 137.

[2]) Zie TAIT, §§ 248—252, MOLENBROEK, Anwendung der Q.-auf die Geom. § 48. en vlg.

[3]) TAIT, § 165 en vlg.; MOLENBROEK, § 155 en vlg.; ook Anw. d. Q. a. d. G. § 58.

recht waren. Wij hebben hier namelijk slechts met een bijzonder geval te doen van de stelling, dat elke twee geconjugeerde richtingen der ellipsoïde voor de vervorming loodrecht op elkander waren. Zijn toch $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ twee zoodanige richtingen, die oorspronkelijk langs $d\varrho_1$, $d\varrho_2$ vielen, dan is [1])

$$S \,.\, d\sigma_1 \, \psi \, d\sigma_2 = 0,$$

of

$$S \,.\, \chi^{-1} d\sigma_1 \, \chi^{-1} d\sigma_2 = 0,$$

derhalve volgens (22)

$$S \, d\varrho_1 \, d\varrho_2 = 0.$$

Tevens blijkt hieruit, dat slechts één stelsel van drie richtingen aan te geven is, die zoowel voor als na de vervorming onderling loodrecht zijn.

Met een klein plat vlak

$$S \, \omega \, d\varrho = 0$$

komt later overeen

$$S \,.\, d\sigma \, (\chi^{-1})' \, \omega = 0,$$

dat is dus opnieuw een plat vlak.

Neemt men twee punten met de vectoren $\varrho + d\varrho$ en $\varrho + d\varrho_1$ voor de vervorming, dan correspondeeren hiermede later $\sigma + \chi \, d\varrho$ en $\sigma + \chi \, d\varrho_1$, zoodat de verbindingslijn, die oorspronkelijk $d\varrho - d\varrho_1$ was, is overgegaan in $\chi (d\varrho - d\varrho_1)$. De uitrekkingsverhouding voor deze lijn bedraagt dus

$$\frac{T \chi (d\varrho - d\varrho_1)}{T (d\varrho - d\varrho_1)} = T \chi \, U (d\varrho - d\varrho_1).$$

Deze vorm is alleen van de richting der verbindingslijn afhankelijk, waardoor de stelling bewezen is, dat alle evenwijdige lijnen in de zelfde verhouding hare lengten veranderen.

Als men in het bijzonder aanneemt, dat de verbindingslijn in de richting valt, die de richting ι_1 oorspronkelijk had, d. i. langs den vector $\chi^{-1} \iota_1$, dan heeft men te stellen

$$d\varrho - d\varrho_1 = u \, \chi^{-1} \, \iota_1,$$

waarin u een zeer kleine positieve grootheid is. Nu wordt de vorige uitdrukking

---

[1]) TAIT, § 254 en vlg.; MOLENBROEK, Anw. d. Q. a. d. G. § 56.

$$\frac{T\chi(d\varrho - d\varrho_1)}{T(d\varrho - d\varrho_1)} = \frac{1}{T\chi^{-1}\iota_1}$$

Duiden wij door OA', OB', OC' de assen der bovengenoemde ellipsoïde aan en door OA, OB, OC de oorspronkelijk daarmede overeenstemmende richtingen, dan kan men het punt $\varrho + d\varrho$ in het vlak BOC gelegen denken, zoodat het na de vervorming in het vlak $B'OC'$ komt te liggen. Uit het vorige blijkt nu, dat de afstand van een willekeurig punt tot het vlak BOC in de standvastige verhouding

$$\frac{1}{T\chi^{-1}\iota_1}$$

verandert. Opereert men echter aan de eerste der vergelijkingen (24) met $S.\iota_1$, dan vindt men

$$T\chi^{-1}\iota_1 = \sqrt{m_1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

derhalve kan voor de uitrekkingsverhouding in de richting OA ook geschreven worden $1 : \sqrt{m_1}$. Op dezelfde wijze worden de overeenkomstige grootheden voor de richtingen OB, OC door $1 : \sqrt{m_2}$, $1 : \sqrt{m_3}$ voorgesteld.

De geheele vervorming komt dus hierop neder, dat het oorspronkelijke bolletje uitrekkingen ondergaan heeft in drie onderling loodrechte richtingen $\chi^{-1}\iota_1$, $\chi^{1-}\iota_2$, $\chi^{-1}\iota_3$, terwijl daarop een draaiing gevolgd is, waardoor deze drie vektoren langs $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ gekomen zijn. Deze konische draaiing hebbe om een as plaats, welke met den eenheidsvektor γ samenvalt, terwijl het bedrag der draaiing $t\pi$ zij; dan moet volgens een bekende schrijfwijze der quaternionentheorie gesteld worden [1])

$$U\chi^{-1}\iota_1 = \gamma^{-t}\iota_1\gamma^t, \text{ enz.}$$

en in verband met de vergelijking (25) ontstaan dus de betrekkingen

$$\left.\begin{aligned} \chi^{-1}\iota_1 &= \sqrt{m_1}\,\gamma^{-t}\,\iota_1\,\gamma^t \\ \chi^{-1}\iota_2 &= \sqrt{m_2}\,\gamma^{-t}\,\iota_2\,\gamma^t \\ \chi^{-1}\iota_3 &= \sqrt{m_3}\,\gamma^{-t}\,\iota_3\,\gamma^t \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

waaruit γ en t bepaald moeten worden.

---

[1]) Tait, § 354 en vlg.; Molenbroek, § 111.

Wij vonden zooeven voor de lineaire uitrekkingsverhoudingen

$$\frac{1}{\sqrt{m_1}}, \frac{1}{\sqrt{m_2}}, \frac{1}{\sqrt{m_3}}.$$

De dilatatie der vlakte-eenheid, loodrecht op de richting van den eenheidsvektor ω aangebracht, is eveneens op eenvoudige wijze aan te geven. Zijn namelijk $d\varrho_1$, $d\varrho_2$ twee kleine vectoren in dat vlak, dan is die dilatatie [1])

$$\frac{T V \chi d\varrho_1 \chi d\varrho_2}{T V d\varrho_1 d\varrho_2} = T . x \chi'^{-1} \omega,$$

waarin x op de functie χ betrekking heeft.

Nog wordt de cubische dilatatie voorgesteld door

$$\frac{S . \chi d\varrho_1 \chi d\varrho_2 \chi d\varrho_3}{S . d\varrho_1 d\varrho_2 d\varrho_3} = x.$$

Men kan deze grootheid echter ook gemakkelijk in m_1, m_2, m_3 uitdrukken. Want de inhoud van het bolletje $\frac{4}{3}\pi r^3$ gaat later in dien der ellipsoïde $\frac{4}{3}\pi \frac{r^3}{\sqrt{m_1 m_2 m_3}}$ over, zoodat de cubische dilatatie gemeten zal worden door

$$\frac{1}{\sqrt{m_1 m_2 m_3}} = \frac{1}{\sqrt{X}},$$

wanneer X de bekende beteekenis voor de functie $(\chi^{-1})' \chi^{-1}$ heeft.

8. De nadere bepaling dezer dilataties en van de as en de grootte der konische draaiing zullen wij alleen uitvoeren voor een geval, waarin de vervorming gering is, zoodat m_1, m_2, m_3 slechts weinig van de eenheid verschillen. Dit geval treedt in, als de beschouwde elastische massa een continue beweging bezit en wij haren toestand beschouwen op twee opeenvolgende tijdstippen t en $t + dt$. Duiden wij nu de snelheid van het deeltje in het punt ϱ door $\dot{\varrho}$ aan, dan kan algemeen gesteld worden

$$\dot{\varrho} = \alpha_1 F_1 \varrho + \alpha_2 F_2 \varrho + \alpha_3 F_3 \varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (27)$$

waarin F_1, F_2, F_3 behalve ϱ ook t bevatten. In plaats van de in

---

[1]) TAIT, § 145; MOLENBROEK, § 143, formule (*f.* 32).

het voorgaande gebruikte grootheid σ moet nu $\varrho + \ddot{\varrho}\, dt$ gesteld worden. Is

$$d\dot{\varrho} = \alpha_1 S \nu_1 d\varrho + \alpha_2 S \nu_2 d\varrho + \alpha_3 S \nu_3 d\varrho = \varphi\, d\varrho \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

de verandering van $\dot{\varrho}$ bij overgang van het punt ϱ naar $\varrho + d\varrho$ op hetzelfde tijdstip t, dan wordt

$$d\sigma = d\varrho + \varphi\, d\varrho \,.\, dt.$$

Ter wille van een duidelijke schrijfwijze vervangen wij dt door u. Nu heeft men voor de in § 5 dezer verhandeling gebruikte functie χ

$$\chi = 1 + u\varphi, \quad \chi^{-1} = 1 - u\varphi,$$

aangezien $\chi\chi^{-1} = 1$. Hiermede wordt dan

$$T\chi^{-1}\iota_1 = 1 + u S \iota_1 \varphi \iota_1 = \sqrt{m_1}.$$

De drie lineaire uitrekkingscoëffienten $\frac{1}{\sqrt{m_1}} - 1, \frac{1}{\sqrt{m_2}} - 1, \frac{1}{\sqrt{m_3}} - 1$ worden dus door

$$-u S \iota_1 \varphi \iota_1, \quad -u S \iota_2 \varphi \iota_2, \quad -u S \iota_3 \varphi \iota_3$$

voorgesteld en hieruit volgt dan verder voor den cubischen dilatatie-coëfficient

$$D = -u S(\iota_1 \varphi \iota_1 + \iota_2 \varphi \iota_2 + \iota_3 \varphi \iota_3),$$

of, aangezien $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ een rechthoekig stelsel van eenheidsvectoren vormen,

$$D = u x_2.$$

De eerste der vergelijkingen (24) vereenvoudigt zich tot

$$\varphi_0 \iota_1 + \iota_1 S \iota_1 \varphi \iota_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Om nu de richting der oogenblikkelijke as van wenteling van het deeltje en de grootte h der hoeksnelheid te vinden, merken wij op, dat hu het bedrag der wenteling in den tijd dt voorstelt, zoodat hu/π voor t in de formules (26) in de plaats gesteld moet worden. Volgens een bekende formule is bovendien

$$\gamma^t = \operatorname{Cos} t\frac{\pi}{2} + \gamma \operatorname{Sin} t\frac{\pi}{2},$$

dus in het beschouwde geval is

$$\gamma^t = 1 + \tfrac{1}{2} hu\gamma.$$

Daardoor ontstaan dus uit (26) betrekkingen van den vorm

$$\varphi\iota_1 + \iota_1 S\iota_1\varphi\iota_1 = hV\gamma\iota_1,$$

die tengevolge van de vergelijking (29) zich herleiden tot

$$V\delta\iota_1 = hV\gamma\iota_1,\ V\delta\iota_2 = hV\gamma\iota_2,\ \text{enz.},$$

derhalve

$$\delta = h\gamma.$$

Hieruit blijkt dus, dat de vector δ door zijne lengte de hoeksnelheid, door zijne richting de oogenblikkelijke as van wenteling van het deeltje aangeeft. Daarom gaven wij reeds in § 2 van deze verhandeling aan δ den naam van den rotatievector in de functie φ begrepen.

De hier verkregene resultaten zullen wij nu verder toepassen in de theorie der beweging van vloeistoffen. Vooreerst gaan wij over tot het opstellen van

de algemeene hydrodynamische vergelijkingen.

9. De grootte van den druk in een punt der vloeistof is een scalaire functie p van ϱ; wij onderstellen dus, dat geschreven kan worden

$$dp = S\pi_0\, d\varrho.$$

Beschouwt men nu het volume-element

$$dv = S\, d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varrho_3,$$

dan werken op de zijvlakken, die evenwijdig zijn aan de richtingen $d\varrho_2, d\varrho_3$, nabij het punt ϱ de krachten

$$pVd\varrho_2 d\varrho_3,\ -(p + S\pi_0\, d\varrho_1)\, Vd\varrho_2\, d\varrho_3,$$

zoodat de totale kracht, die het volume-element tengevolge van den hydrostatischen druk ondervindt, bedraagt

$$-[Vd\varrho_2 d\varrho_3\,.\,S\pi_0 d\varrho_1 + Vd\varrho_3 d\varrho_1.\,S\pi_0 d\varrho_2 + Vd\varrho_1 d\varrho_2.\,S\pi_0 d\varrho_3]$$
$$= -\pi_0 S\, d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varrho_3 = -\pi_0\, dv. \text{ (volgens 4*)}$$

Is $\varkappa$ de uitwendige kracht per massa-eenheid, m de dichtheid der vloeistof, dan wordt derhalve de bewegingsvergelijking

$$m\frac{d\dot{\varrho}}{dt} = m\varkappa - \pi_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

De continuiteitsvergelijking is eveneens gemakkelijk af te leiden. Want in de vorige § vonden wij voor den cubischen dilatatiecoëfficient in den tijd dt de uitdrukking $x_2\,dt$ en hieruit volgt dan, als wij weder een differentiatie naar t door NEWTON's schrijfwijze aangeven,

$$m\,x_2 + \dot{m} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Deze vergelijking zou natuurlijk ook zonder de voorafgaande beschouwingen der elasticiteitstheorie op de volgende wijze gevonden kunnen worden. Daar het element $d\varrho_1$ in den tijd dt overgaat in $d\varrho_1 + \varphi\,d\varrho_1 \,.\, dt,$ zoo zal het volume-element $S\,d\varrho_1\,d\varrho_2\,d\varrho_3$ daarbij overgaan in

$$S\,d\varrho_1\,d\varrho_2\,d\varrho_3 + dt\,S\,(d\varrho_2\,d\varrho_3\;\varphi\,d\varrho_1 + d\varrho_3\,d\varrho_1\;\varphi\,d\varrho_2 + d\varrho_1\,d\varrho_2\;\varphi\,d\varrho_3)$$
$$= S\,d\varrho_1\,d\varrho_2\,d\varrho_3\,(1 + x_2\,dt),$$

waardoor wij de vorige uitdrukking voor den dilatatiecoëfficient teruggevonden hebben.

Voor een onsamendrukbare vloeistof neemt de continuiteitsvergelijking den zeer eenvoudigen vorm aan

$$x_2 = 0.$$

De bewegingsvergelijking (30) kan nog in een andere gedaante gebracht worden. Wanneer wij allereerst, zooals gebruikelijk is

$$\int \frac{dp}{m} = P$$

stellen en verder

$$dP = S\,\pi\,d\varrho, \text{ dus } \pi_0 = m\,\pi\,;$$

wanneer wij dan bovendien in het oog houden, dat de betrekking geldt

$$\frac{d\dot{\varrho}}{dt} = \frac{\partial\dot{\varrho}}{\partial t} + \varphi\dot{\varrho},$$

dan luidt de bewegingsvergelijking

$$\frac{d\dot{\varrho}}{dt} = \frac{\partial\dot{\varrho}}{\partial t} + \varphi\,\dot{\varrho} = \varkappa - \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

In het geval van een stationaire beweging vereenvoudigt deze zich tot

$$\varphi\,\dot{\varrho} = \varkappa - \pi.$$

Uit het voorafgaande is verder duidelijk, dat de beide gevallen, waarin een snelheidspotentiaal al of niet bestaat, alleen daardoor onderscheiden zijn, dat in het eerste geval φ een zelfverwante lineaire vectorfunctie is, in het tweede geval niet.

Wervelbeweging.

10. Wij zullen nu aantoonen, dat de wervelbeweging op zeer eenvoudige wijze door middel van quaternionen beschreven kan worden. Er zij dus in het volgende ondersteld, dat φ een willekeurige lineaire vektorfunctie is, welks rotatievector door δ aangeduid wordt. Zooals wij in § 8 aantoonden, stelt dan δ in grootte en richting de werveldraaiing voor. Denken wij φ in den door (28) aangeduiden vorm en geven wij door d den overgang aan van een punt ϱ der vloeistof naar een nabijgelegen punt op hetzelfde tijdstip, dan volgt uit de bewegingsvergelijking (32)

$$\frac{\partial d\dot{\varrho}}{\partial t} + \varphi d\dot{\varrho} + \alpha_1 S\dot{\varrho}\, d\nu_1 + \alpha_2 S\dot{\varrho}\, d\nu_2 + \alpha_3\, S\dot{\varrho} d\nu_3 = d\varkappa - d\pi,$$

of, als men stelt

$$d\nu_1 = \varphi_1\, d\varrho,\; d\nu_2 = \varphi_2\, d\varrho\,,\; d\,\nu_3 = \varphi_3\, d\varrho,$$

$$d\varkappa = \psi_1\, d\varrho\,,\; d\pi = \psi_2\, d\varrho,$$

$$\frac{\partial \varphi d\varrho}{\partial t} + \varphi^2\, d\varrho + \alpha_1 S\, d\varrho\, \varphi_1 \dot{\varrho} + \alpha_2 S\, d\varrho\, \varphi_2\, \dot{\varrho} + \alpha_3\, S\, d\varrho\, \varphi_3\, \dot{\varrho} = (\psi_1 - \psi_2) d\varrho \quad (33)$$

Hierin zijn volgens § 4 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2$ zelfverwante functies. Daar van het tweede lid dezer vergelijking hetzelfde geldt, zoo moet dus ook de rotatievektor van het eerste lid verdwijnen. Nu is φ'^2 de geconjugeerde functie van φ en volgens (13)

$$\varphi^2 - \varphi'^2 = 2\, [\varphi_0\, V\delta\, d\varrho + V.\delta\, \varphi_0\, d\varrho]$$

Voert men hierin voor $d\varrho$ de waarde in uit

$$d\varrho\, S\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma\, d\varrho + \beta S\gamma\alpha\, d\varrho + \gamma\, S\alpha\beta\, d\varrho \quad . \quad . \quad (34)$$

waarin α, β, γ willekeurige vektoren voorstellen, dan vindt men volgens (14*) voor het product van den rotatievektor in φ^2 begrepen met $S\alpha\beta\gamma$

$$\tfrac{1}{2} V[(\varphi_0 V\delta\alpha + V.\delta\,\varphi_0\,\alpha)\, V\beta\gamma + (\varphi_0\, V\delta\,\beta + V.\delta\,\varphi_0\beta)\, V\gamma\alpha +$$
$$+ (\varphi_0 V\delta\gamma + V.\delta\,\varphi_0\gamma)\, V\alpha\beta]$$

of na eenige herleiding

$$(x_2 - \varphi_0)\,\delta\,,$$

zoodat de rotatievektor in het eerste lid der vergelijking (33) wordt

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} + (x_2 - \varphi_0)\,\delta + \tfrac{1}{2}V(\alpha_1\,\varphi_1\,\dot\varrho + \alpha_2\,\varphi_2\,\dot\varrho + \alpha_3\,\varphi_3\,\dot\varrho).$$

Nu volgt echter uit

$$\delta = \tfrac{1}{2}V(\alpha_1\,\nu_1 + \alpha_2\,\nu_2 + \alpha_3\,\nu_3)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\partial\delta}{\partial t} + \tfrac{1}{2}V(\alpha_1\,\varphi_1\,\dot\varrho + \alpha_2\,\varphi_2\,\dot\varrho + \alpha_3\,\varphi_3\,\dot\varrho),$$

zoodat ten slotte de vergelijking voor de wervelbeweging luidt

$$\frac{d\delta}{dt} = \dot\delta = (\varphi_0 - x_2)\,\delta\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

waarvoor men ook zou mogen schrijven

$$\dot\delta = (\varphi - x_2)\,\delta.$$

Deze vergelijking, die geheel algemeen bij vloeistoffen en gassen geldt, is zoo eenvoudig, dat zij wel als een der merkwaardigste voorbeelden van de fraaie wijze van behandeling door middel van quaternionen gelden mag. Voor onsamendrukbare vloeistoffen neemt zij den vorm aan

$$\dot\delta = \varphi_0\,\delta = \varphi\,\delta\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

11. Het valt niet moeilijk met behulp van deze vergelijkingen de bekende eigenschappen der wervelbewegingen te bewijzen. Allereerst blijkt onmiddellijk, dat een deeltje, dat eenmaal geen rotatiesnelheid bezit, deze ook niet verkrijgen zal.

Neemt men twee deeltjes, welker verbindingslijn met een element van een wervellijn samenvalt, die dus vektoren ϱ en $\varrho + lU\delta$ hebben, dan zijn na een tijd dt hunne vektoren

$$\varrho + \dot\varrho\,dt,\ \ \varrho + lU\delta + (\dot\varrho + l\varphi\,U\delta)\,dt,$$

zoodat de verbindingslijn geworden is

$$l(U\delta + \varphi\,U\delta\,.\,dt).$$

Nu wordt echter de hoeksnelheid van het deelte op het tijdstip $t + dt$ aangegeven door $\delta + \dot\delta\,dt$. Maar

$$V(\delta + \dot{\delta}\, dt)\,(U\delta + \varphi U\delta\,.\,dt)$$

blijkt een oneindig kleine grootheid van de tweede orde te zijn, als men de waarde van $\dot{\delta}$ uit (35) invoert. Hieruit volgt dus, dat de verbindingslijn van twee deeltjes, die op het tijdstip t langs een wervellijn valt, dezelfde eigenschap gedurende de geheele beweging behoudt.

De lengte der verbindingslijn van de beide deeltjes op het tijdstip $t + dt$ is

$$l' = lT(U\delta + \varphi U\delta\,.\,dt) = l(1 - S\, U\delta\, \varphi U\delta\,.\,dt)$$

en de grootte der hoeksnelheid op hetzelfde tijdstip is

$$h' = T(\delta + \dot{\delta}\, dt) = T\delta\,(1 - S\, U\delta\, \varphi\, U\delta\,.\,dt - x_2\, dt)$$

Hieruit volgt

$$\frac{h'}{l'} = \frac{T\delta}{l}\,(1 - x_2\, dt) = \frac{T\delta}{l}\left(1 + \frac{\dot{m}}{m}\, dt\right) \text{ volgens (31),}$$

of, als men $m + \dot{m}\, dt$ door m' en $T\delta$ door h aanduidt,

$$\frac{h'}{m'l'} = \frac{h}{ml}.$$

Het product van den afstand van twee deeltjes met de dichtheid blijft gedurende de beweging dus evenredig met de hoeksnelheid. Zooals bekend is, kan deze eigenschap ook op de navolgende wijze uitgedrukt worden: het product van de hoeksnelheid met de doorsnede van een werveldraad behoudt gedurende de beweging een standvastige waarde. Om haar te bewijzen kan men dus ook aantoonen, dat

$$\delta^2\, V^2\, d\varrho\, d\varrho_1 = \text{een standvastige grootheid [1]},$$

als $d\varrho$, $d\varrho_1$ twee lijnelementen voorstellen loodrecht op de wervellijn. Volgens § 9 is

$$\frac{d}{dt}\, d\varrho = \varphi\, d\varrho\,;$$

derhalve wordt[2])

---

[1]) Tait, § 96; Molenbroek, § 86, formules (c. 33) en (c. 34).

[2]) Tait, § 134; Molenbroek, § 118, formule (e. 22).

$$\frac{d}{dt}\delta^2 V^2 d\varrho\, d\varrho_1 = 2\, S\,\delta\dot{\delta}\, V^2 d\varrho\, d\varrho_1 + 2\,\delta^2 S\,.\, V d\varrho\, d\varrho_1\, V(\varphi\, d\varrho\,.\, d\varrho_1 + d\varrho\,\varphi\, d\varrho_1).$$

Hierin is nu volgens een bekende formule der theorie[1])

$$V(d\varrho\,\varphi\, d\varrho_1 + \varphi\, d\varrho\,.\, d\varrho_1) = (x_2 - \varphi')\, V d\varrho\, d\varrho_1$$
$$= TV d\varrho\, d\varrho_1\,.\,(x_2 - \varphi')\, U\delta,$$

en het tweede lid der vorige vergelijking wordt dus na deeling door $2V^2 d\varrho\, d\varrho_1$

$$S\,\delta\dot{\delta} - \delta^2 S\,.\, U\delta\,(x_2 - \varphi)\, U\delta,$$

een vorm, die met het oog op de vergelijking (35) verdwijnt.

Eindelijk beschouwen wij de ruimte, ingenomen door een deel van een werveldraad, dat door twee doorsneden, loodrecht op de wervellijnen aangebracht, begrensd wordt. Passen wij hierop nu het theorema van Green toe in den vorm (19), waarbij voor F de eenheid genomen worde, zoodat K verdwijnt, en voor $\varkappa$ de vector δ. Volgens § 4 is hiervoor $x_2 = 0$, waardoor men vindt

$$\iint S\,\delta\, U\nu\, do = 0.$$

In deze vergelijking ligt de stelling opgesloten, dat langs een werveldraad de hoeksnelheid in elk punt omgekeerd evenredig is met de grootte der loodrechte doorsnede.

12. Men kan op dezelfde wijze, als zulks in de gewone rekenwijze geschiedt, aantoonen, dat de beweging eener onsamendrukbare vloeistof, die op oneindigen afstand in rust verkeert, op elk tijdstip geheel bepaald is, als de waarde van δ in elk punt op dat oogenblik gegeven is. Hierbij zullen wij niet stilstaan, doch onderzoeken, hoe in dat geval de waarde van $\dot{\varrho}$ in elk punt gevonden kan worden, waardoor dan ook ψ bekend is, zoodat tengevolge van de vergelijking (35) dus ook de beweging op elk volgend tijdstip gevonden kan worden. Daarbij nemen wij aan, dat de vloeistof onsamendrukbaar is.

Aangezien voor $\dot{\varrho}$ in dat geval, evenals voor δ, de grootheid x_2 verdwijnt, zoo ligt de onderstelling voor de hand, of $\dot{\varrho}$ ook als rotatievector van een nader te bepalen lineaire vectorfunctie χ kan worden voorgesteld.

---

[1]) Tait § 147; Molenbroek, § 145, formule (f. 44).

Indien nu

$$\chi\sigma = \alpha_1 S\mu_1\sigma + \alpha_2 S\mu_2\sigma + \alpha_3 S\mu_3\sigma$$

gesteld wordt, dan is dus

$$2\dot{\varrho} = V(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \alpha_3\mu_3).$$

Hieruit volge nu

$$2\,d\dot{\varrho} = \varphi\,d\varrho = V(\alpha_1\chi_1 d\varrho + \alpha_2\chi_2 d\varrho + \alpha_3\chi_3 d\varrho).$$

Vervangt men weder $d\varrho$ door de uitdrukking in (34) aangegeven, dan leidt men gemakkelijk af volgens (14*)

$$2\delta S\alpha\beta\gamma = V.[V(\alpha_1\chi_1\alpha + \alpha_2\chi_2\alpha + \alpha_3\chi_3\alpha).V\beta\gamma +$$
$$+ V(\alpha_1\chi_1\beta+\alpha_2\chi_2\beta+\alpha_3\chi_3\beta).V\gamma\alpha + V(\alpha_1\chi_1\gamma+\alpha_2\chi_2\gamma+\alpha_3\chi_3\gamma).V\alpha\beta]$$

of na eenige herleiding [1])

$$2\delta = (x_2' - \chi_1)\alpha_1 + (x_2'' - \chi_2)\alpha_2 + (x_2''' - \chi_3)\alpha_3,$$

waarin x'_2, x''_2, x'''_2 de waarden van de invariant x_2 voor de functies χ_1, χ_2, χ_3 voorstellen. Daar echter voor φ in alle punten der ruimte x_2 verdwijnt, zoo is volgens § 4

$$\chi_1\alpha_1 + \chi_2\alpha_2 + \chi_3\alpha_3 = 0,$$

derhalve

$$2\delta = x_2'\alpha_1 + x_2''\alpha_2 + x_2'''\alpha_3$$

of volgens § 2

$$x_2' = 2\frac{S\alpha_2\alpha_3\delta}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3},\quad x_2'' = 2\frac{S\alpha_3\alpha_1\delta}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3},\quad x_2''' = 2\frac{S\alpha_1\alpha_2\delta}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3}.$$

Denkt men zich nu drie massaverdeelingen in de ruimte, welker dichtheden achtereenvolgens bedragen

$$-\frac{x_2'}{4\pi},\quad -\frac{x_2''}{4\pi},\quad -\frac{x_2'''}{4\pi},$$

dan zullen volgens § 5 de vectoren μ_1, μ_2, μ_3 de daarvan afkomstige krachten voorstellen. Wanneer de waarde van δ in het punt ϱ' door δ' wordt aangeduid en een daar ter plaatse gelegen volume-

---

[1]) TAIT, § 91; MOLENBROEK, § 88, formule (c. 44).

element door dv', dan is volgens § 5

$$\mu_1 = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{S\alpha_2\alpha_3\delta}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \quad \frac{dv'}{T(\varrho-\varrho')^3}(\varrho-\varrho'),$$

zoodat de functie $\chi\sigma$ ten slotte bepaald wordt door

$$\chi\sigma = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\delta' S\sigma(\varrho-\varrho')}{T(\varrho-\varrho')^3}\,dv' \quad \dots\dots \quad (37)$$

en $\dot{\varrho}$ door

$$\dot{\varrho} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{V.\delta'(\varrho-\varrho')}{T(\varrho-\varrho')^3}\,dv' \quad \dots\dots \quad (38)$$

Uit (37) volgt nog, als men σ door $d\varrho$ vervangt,

$$\int \chi\, d\varrho = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\delta'}{T(\varrho-\varrho')}\,dv'.$$

De functie in het tweede lid dezer vergelijking levert dus ten slotte de kennis der geheele beweging. Wij zullen hier niet verder aantoonen, dat deze functie inderdaad aan alle voorwaarden voldoet, aangezien dit bewijs geleverd kan worden geheel overeenkomstig de methode, door HELMHOLTZ in zijne bekende verhandeling gevolgd. Wij stippen echter aan, dat de vergelijking (38) de volgende stelling bevat: het aandeel, door het volume-element dv' tot de grootte van $\dot{\varrho}$ bijgedragen, is

$$\frac{1}{4\pi}\,\frac{V.\delta' U(\varrho-\varrho')}{T(\varrho-\varrho')^2}\,dv'.$$

Het deeltje dv' veroorzaakt dus in het punt ϱ een snelheid, welke loodrecht gericht is op de oogenblikkelijke as van wenteling δ' van het deeltje en op de verbindingslijn $\varrho-\varrho'$, terwijl de grootte evenredig is met de oogenblikkelijke hoeksnelheid van het deeltje en den sinus van den hoek tusschen rotatie-as en verbindingslijn, daarentegen omgekeerd evenredig met het vierkant van den afstand.

Tengevolge van de transformaties in § 6 kan aan de functie

$$F = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\delta'}{T(\varrho-\varrho')}\,dv'$$

nog een andere gedaante toegekend worden. Stelt men namelijk in de vergelijking (20)

$$\varkappa = \tfrac{1}{2}\,U(\varrho-\varrho'),$$

dan vindt men voor de hierbij behoorende waarde van x_2

$$x_2 = -\frac{1}{T(\varrho - \varrho')},$$

en als nu voor N de grootheid δ' genomen en de integratie over de oneindige ruimte uitgestrekt wordt, aan welks oppervlak δ' verdwijnt, dan wordt

$$\iiint \frac{\delta'}{T(\varrho-\varrho')} dv' = \tfrac{1}{2} \iiint \psi \, U(\varrho-\varrho') \, dv',$$

waarin ψ de lineaire vectorfunctie voorstelt, die bij het differentieeren van δ' gevonden wordt.

Stationaire potentiaalbeweging.

Vloeistofstralen in de ruimte.

13. In het algemeen zal het vraagstuk, een stationaire wervellooze beweging van een onsamendrukbare vloeistof te beschrijven, volgens § 9 neerkomen op de bepaling van een zelfverwante lineaire vectorfunctie φ_0, die aan gegeven grensvoorwaarden voldoen moet en tevens aan de vergelijkingen

$$d\dot{\varrho} = \varphi_0 \, d\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

$$\varphi_0 \dot{\varrho} = \varkappa - \pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

$$x_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

Het is duidelijk, dat men eerst uit (41), de gegeven grensvoorwaarden en desgevorderd (39) de functie φ_0 en $\dot{\varrho}$ zal moeten bepalen, daarna π uit (40).

Een der meest tot heden uitgewerkte vraagstukken is dat der vloeistofstralen. Zooals bekend is, is het nog slechts gelukt volgens een strenge methode het geval te behandelen, waarin geen uitwendige krachten werken en de beweging slechts van twee coördinaten afhankelijk is. Vloeistofstralen in de ruimte hebben tot heden aan elke poging om het vraagstuk tot een eenvoudigen vorm terug te brengen weerstand geboden. Wij zullen nu eerst den algemeenen quaternionvorm voor deze beweging opstellen en de eenvoudige uitkomst, waartoe wij geraken, zal ons dan in staat stellen een alge-

meene eigenschap dezer bewegingen te bewijzen, welke in verband staat met de theorie der oppervlakken.

Vooraf willen wij echter opmerken, dat de hydrodynamische vergelijking voor het geval, dat er geen wervels in de vloeistof aanwezig zijn, ook in den door (32) aangeduiden vorm gemakkelijk geintegreerd kan worden, mits de uitwendige krachten een potentiaal F hebben.

De vektor $\dot{\varrho}$ valt in richting met de normaal tot een aequipotentiaaloppervlak samen. Is $d\varrho$ een lijnelement in het oppervlak gelegen, dan is dus

$$S\dot{\varrho}\,d\varrho = 0$$

en men zal dientengevolge onmiddellijk de vergelijking van een zoodanig oppervlak verkrijgen, als de functie $S\dot{\varrho}\,d\varrho$ integrabel is. Dit nu is inderdaad het geval, aangezien aan de voorwaarde, welker vervulling daartoe vereischt wordt, dat $d\dot{\varrho}$ een zelfverwante lineaire vectorfunctie is, hier inderdaad voldaan wordt [1]). Derhalve is

$$f\varrho = \int S\dot{\varrho}\,d\varrho = \text{standvastig} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

de vergelijking van de aequipotentiale oppervlakken en $f\varrho$ de snelheidspotentiaal in het punt ϱ. Verder is de krachtfunctie bepaald door

$$dF = -\,S\varkappa\,d\varrho.$$

Wanneer men nu aan de vergelijking (17) met $S\,.\,d\varrho$ opereert, dan wordt door integratie gevonden

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\dot{\varrho}^2 + F + P = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

waarin C alleen van t afhangen kan. Bij een stationaire beweging, bij welke geen uitwendige krachten werkzaam zijn, is dan

$$\tfrac{1}{2}\dot{\varrho}^2 + P = \text{standvastig} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

De grensvoorwaarden, waaraan bij een vloeistofstraal voldaan moet worden zijn: In het vrije vloeistofoppervlak heeft, zooals uit (44) in verband met de continuiteit van den druk volgt, de snelheid een

---

1) Tait, § 317; Molenbroek, Anw. d. Q. a. d. G. § 95.

standvastige waarde en bij den vasten wand is er geen snelheidscomponent loodrecht op het oppervlak. De vergelijking van het vrije vloeistofoppervlak zal dus worden voorgesteld door

$$\dot{\varrho}^2 = -a^2 \text{ of } T\dot{\varrho} = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Differentieerend vindt men [1])

$$S \,.\, d\varrho\, \varphi_0 \dot{\varrho} = 0,$$

zoodat de normaal tot het straaloppervlak wordt voorgesteld door $\varphi_0 \dot{\varrho}$.

In de punten van het oppervlak (45) moet derhalve de voorwaarde vervuld worden

$$S \,.\, \dot{\varrho}\, \varphi_0 \dot{\varrho} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Zoodra men verder een oppervlak construeert, welks normaal door ν aangeduid worde, waar in elk punt de betrekking geldt

$$S\dot{\varrho}\nu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

zal men dit als een vasten wand mogen beschouwen. Het is nu niet moeilijk een zoodanig oppervlak te vinden. Want, indien eenmaal uit de betrekking $x_2 = 0$ benevens (39) en de gelijktijdige vervulling van (45) en (46) de functie φ_0 en de vektor $\dot{\varrho}$ bepaald zijn, heeft men in (47) een lineaire partieele differentiaalvergelijking van de eerste orde, welker integratie het gezochte oppervlak levert. Voor een dergelijke integratie heb ik in mijne „Anwendung der der Quaternionen auf die Geometrie" twee methoden gegeven.

In de vergelijking (46) ligt een algemeene eigenschap der vloeistofstralen opgesloten. Om deze af te leiden brengen wij eerst eenige bekende formules uit de theorie der oppervlakken in herinnering.

Is $d\varrho$ een lijnelement op een aequipotentiaal oppervlak in het punt ϱ getrokken en brengt men hierdoor een normale doorsnede tot het oppervlak, dan is

$$R = -\frac{T\dot{\varrho}}{S.\, Ud\varrho\, \varphi_0\, Ud\varrho}$$

de kromtestraal dier doorsnede [2]); deze is gelijk aan het vierkant van de halve middellijn, welke in het oppervlak van den tweeden graad met de vergelijking

---

[1]) TAIT, § 134; MOLENBROEK, § 118, formule (e. 22).

[2]) TAIT, § 333; MOLENBROEK, Anw. d. Q. a. d. G., § 14(.

$$S\omega\varphi_0\omega = T\dot{\varrho}$$

evenwijdig aan de richting van $d\varrho$ getrokken wordt. De richting $d\varrho$ behoort tot het raakvlak aan het oppervlak, dus is

$$S\dot{\varrho}\,d\varrho = 0.$$

Zijn nu $d\varrho_1$, $d\varrho_2$ de hoofdrichtingen van het oppervlak in het beschouwde punt, dan zal de som der hoofdkromtestralen dus verdwijnen, als

$$S.\,Ud\varrho_1\varphi_0\,Ud\varrho_1 + S.\,Ud\varrho_2\varphi_0\,Ud\varrho_2 = 0.$$

Maar in het algemeen is volgens (15), in aanmerking nemende, dat $Ud\varrho_1$, $Ud\varrho_2$ en $U\dot{\varrho}$ drie onderling loodrechte eenheidsvectoren zijn

$$x_2 = -[S.\,Ud\varrho_1\varphi_0\,Ud\varrho_1 + S.\,Ud\varrho_2\varphi_0\,Ud\varrho_2 + S.\,U\dot{\varrho}\varphi_0\,U\dot{\varrho}]$$

en aangezien voor de functie φ_0 de grootheid x_2 verdwijnt, zoo drukt dus de gelijktijdige vervulling van de betrekkingen (45) en (46) de navolgende eigenschap uit:

In elk punt, waar het vrije straaloppervlak een der aequipotentiale oppervlakken ontmoet, hebben de beide hoofdkromtestralen van dit laatste gelijke lengte doch tegenovergestelde richting.

Op vloeistofstralen, bij welke de beweging in een plat vlak plaats heeft, toegepast luidt dit theorema dus: *In elk punt, waar de aequipotentiale lijnen door de vrije vloeistofbegrenzing gesneden worden, bezitten de eerstgenoemde krommen een buigpunt.*

Nadat ik dit theorema met behulp van de quaternionen gevonden had, gelukte het natuurlijk spoedig het ook met gewone coördinaten te bewijzen. Daarbij blijkt dan echter onmiddellijk, waarom deze eigenschap tot heden verborgen bleef. Immers de bekende voorwaarde, die in een punt van een oppervlak

$$z = F(x, y)$$

vervuld moet worden, opdat de beide hoofdkromtestralen gelijk doch tegengesteld zijn

$$(1 + q^2)\,r - 2pqs + (1 + p^2)\,t = 0$$

neemt voor het geval, dat men den algemeenen vorm

$$\varphi(x, y, z) = \text{standvastig}$$

aanwendt een zoo ingewikkelde gedaante aan, dat het moeilijk valt het verband met andere betrekkingen op te sporen.

Onmiddellijk blijkt uit het voorafgaande ook, hoe de uitbreiding

van het theorema luidt op de uitstrooming van een gas onder vrije straalvorming. Immers de formules op de kromming der aequipotentiale oppervlakken betrekking hebbende geven in verband met de continuiteitsvergelijking (16)

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{\dot{m}}{mT\dot{\varrho}}=\frac{\dot{m}}{am}=\frac{1}{a}\frac{d\log m}{dt},$$

zoodat de som der hoofdkrommingen van het evenwichtsoppervlak in een eenvoudig verband blijkt te staan tot de verandering der dichtheid.

14. Hoewel de vorm, waarin het vraagstuk der vloeistofstralen in de ruimte gebracht is, zeer eenvoudig schijnt, zoo is er toch bij de vervulling der grensvoorwaarde een bezwaar, waaraan tegemoet gekomen kan worden. Daar de functie φ_0 den vector ϱ bevat, zoo komen in de vergelijking (46) de beide grootheden ϱ en $\dot{\varrho}$ gelijktijdig voor, hetgeen de oplossing ten zeerste bemoeilijkt.

Nu heb ik echter in mijne „Anwendung enz." aangetoond, dat een merkwaardige transformatie der gewone differentiaalrekening, welke ik reeds vroeger had aangewend om eenige gevallen van de gasbeweging tot een oplosbaren vorm terug te brengen, ook in de quaternionentheorie geldig is. Deze transformatie kan in de gewone rekenwijze ook bij vloeistofstralen, die van twee coördinaten afhankelijk zijn, met goed gevolg worden aangewend, echter niet bij afhankelijkheid van drie coördinaten. Het is nu gemakkelijk aan te toonen, dat zij bij HAMILTON's methode inderdaad vereenvoudiging geeft.

Beschouwen wij opnieuw de functie f, die door de vergelijking (42) gedefinieerd wordt en vormen wij een nieuwe functie

$$F=S\varrho\dot{\varrho}-f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

dan is wegens (42)

$$dF=S\varrho\, d\dot{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

zoodat F een functie van $\dot{\varrho}$ alleen blijkt te zijn en ϱ in dezelfde betrekking staat tot F als $\dot{\varrho}$ tot f. Bij differentiatie zal er derhalve een lineaire vectorfunctie van $d\dot{\varrho}$ doen ontstaan, welke overigens slechts $\dot{\varrho}$ bevat

$$d\varrho=\psi\, d\dot{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Dus is

$$d\dot{\varrho}=\psi^{-1}\, d\varrho=\varphi_0\, d\varrho.$$

De functie ψ^{-1} blijkt dus identiek te zijn met φ_0 of

$$\psi\,\varphi_0=1,$$

waarin de beide symbolen verwisseld mogen worden. ψ is dus evenals φ_0 een zelfverwante lineaire vectorfunctie.

Uit de voor φ_0 geldende vergelijking

$$x_2 = 0$$

volgt nu in verband met (15)

$$S(\beta\gamma\psi^{-1}\alpha + \gamma\alpha\psi^{-1}\beta + \alpha\beta\psi^{-1}\gamma) = 0,$$

of volgens een bekende formule der theorie [1])

$$S(\alpha\psi\beta\psi\gamma + \beta\psi\gamma\psi\alpha + \gamma\psi\alpha\psi\beta) = 0,$$

zoodat voor de functie ψ de grootheid x_1 verdwijnt. Ten slotte neemt dus het vraagstuk der vloeistofstralen in de ruimte den vorm aan:

Een zelfverwante lineaire vektorfunctie ψ te bepalen, welke slechts van $\dot{\varrho}$ afhangt en waarvoor x_1 verdwijnt, terwijl de voorwaarde-vergelijking plaats vindt

$$\text{Voor } T\dot{\varrho} = a \text{ is } S\dot{\varrho}\psi^{-1}\dot{\varrho} = 0.$$

Heeft men hieruit ψ bepaald, dan levert de integratie van de vergelijking (50) ϱ als functie van $\dot{\varrho}$; uit (49) vindt men F en ten slotte is de snelheids-potentiaal bekend, daar uit (46) en de beide zooeven verkregene vergelijkingen $\dot{\varrho}$ en F geëlimineerd kunnen worden.

Onderstellen wij, dat de functie ψ^{-1} in den drietermigen grondvorm geschreven wordt aldus:

$$\psi^{-1}\sigma = \alpha_1 S\xi_1\sigma + \alpha_2 S\xi_2\sigma + \alpha_3 S\xi_3\sigma,$$

waarin ξ_1, ξ_2, ξ_3 van $\dot{\varrho}$ afhangen, dan moet wegens het ontbreken van den rotatievector en het verdwijnen van x_2 voor ψ^{-1} de betrekking gelden

$$\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Voor $T\dot{\varrho} = a$ moet

$$S\dot{\varrho}\alpha_1 S\dot{\varrho}\xi_1 + S\dot{\varrho}\alpha_2 S\dot{\varrho}\xi_2 + S\dot{\varrho}\alpha_3 S\dot{\varrho}\xi_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Door middel van de vergelijking (51) kan onmiddellijk een der

[1]) TAIT, § 145; MOLENBROEK, § 143, formule (f. 32),

C 3

grootheden ξ_1, ξ_2, ξ_3 in de beide andere worden uitgedrukt, b. v.

$$\xi_3 = \alpha_3^{-1}(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2).$$

Hieruit volgt dan, dat de beide vectoren ξ_1, ξ_2 nog slechts aan de betrekking

$$S \alpha_3 (\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2) = 0$$

en aan de vervormde voorwaardevergelijking (52) voldoen moeten.

Hoewel het mij tot heden niet gelukt is, eenigszins belangwekkende oplossingen dezer vergelijkingen te vinden, zoo meen ik toch, dat het uitzicht bestaat, dat langs dezen weg oplossingen voor het vraagstuk zullen gevonden worden. De algemeene gezichtspunten, welke ik in het voorgaande heb uiteengezet, schenen mij echter van genoeg belang, om een afzonderlijke inzending van dit gedeelte te rechtvaardigen.

's Gravenhage, 27 Maart 1893.

N A S C H R I F T.

Eenigen tijd, nadat ik de voorafgaande verhandeling ingezonden had, hield ik mij met hetzelfde onderwerp bezig hoofdzakelijk met het doel op te sporen, of ook bij eindige vervormingen tusschen den rotatievector der lineaire vectorfunctie en de as der konische wenteling een of andere merkwaardige betrekking bestaat. Hiertoe was het noodig de oplossing te vinden van het stelsel van vergelijkingen door (26) aangeduid. Deze oplossing is mij nu inderdaad gelukt en hoewel het niet gemakkelijk is haar een bepaalde mechanische beteekenis toe te kennen, moge zij hier toch wedergegeven worden. Voor zoover mij bekend is, heeft men in de gewone rekenwijze tot heden dit vraagstuk niet ter hand genomen.

Stelt men in de vergelijkingen (26)

$$\gamma^t = q,$$

dan kunnen zij in den navolgenden vorm gebracht worden

$$\left.\begin{aligned} q\chi^{-1}\iota_1 &= \sqrt{m_1}\,\iota_1 q \\ q\chi^{-1}\iota_2 &= \sqrt{m_2}\,\iota_2 q \\ q\chi^{-1}\iota_3 &= \sqrt{m_3}\,\iota_3 q \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

Vermenigvuldigt men nu de eerste vergelijking door ι_2, de tweede door $-\iota_1$, de derde met -1; opereert men daarna aan de drie vergelijkingen met S. en sommeert de uitkomsten, dan ontstaat

$$Sq(\chi^{-1}\iota_1.\iota_2 - \chi^{-1}\iota_2.\iota_1 - \chi^{-1}\iota_3) = -(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} + \sqrt{m_3})\,S\iota_3 q\,. \quad (54)$$

Om deze betrekking te vereenvoudigen stellen wij

$$\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} + \sqrt{m_3} = n.$$

Verder is

$$S(\chi^{-1}\iota_1 \,.\, \iota_2 - \chi^{-1}\iota_2 \,.\, \iota_1) = -S\iota_1[\chi^{-1}\iota_2 - (\chi^{-1})'\iota_2]$$
$$= -2S\iota_1\Delta\iota_2 = 2S\iota_3\Delta,$$

als Δ de rotatievector is van de functie χ^{-1}, welke laatste wij in het volgende kortheidshalve door Θ voorstellen. Dan wordt

$$V(\chi^{-1}\iota_1 \,.\, \iota_2 - \chi^{-1}\iota_2 \,.\, \iota_1) = V(\Theta\iota_1 \,.\, \iota_2 + \iota_1\Theta\iota_2).$$

Maar

$$S \,.\, \iota_1 V(\Theta\iota_1 \,.\, \iota_2 + \iota_1\Theta\iota_2) = -S \,.\, \iota_3\Theta\iota_1 = -S \,.\, \iota_1\Theta'\iota_3,$$
$$S \,.\, \iota_2 V(\Theta\iota_1 \,.\, \iota_2 + \iota_1\Theta\iota_2) = -S \,.\, \iota_3\Theta\iota_2 = -S \,.\, \iota_2\Theta'\iota_3;$$

derhalve

$$S \,.\, \iota_1[V(\Theta\iota_1 \,.\, \iota_2 + \iota_1\Theta\iota_2) + \Theta'\iota_3] = 0,$$
$$S \,.\, \iota_2[V(\Theta\iota_1 \,.\, \iota_2 + \iota_1\Theta\iota_2) + \Theta'\iota_3] = 0,$$

zoodat $V(\Theta\iota_1 \,.\, \iota_2 + \iota_1\Theta\iota_2) + \Theta'\iota_3$ loodrecht is op ι_1 en ι_2 en dus gesteld kan worden

$$V(\Theta\iota_1 \,.\, \iota_2 + \iota_1\Theta\iota_2) + \Theta'\iota_3 = a\iota_3.$$

Hieruit volgt dan door operatie met $S \,.\, \iota_3$

$$S(\iota_1\Theta\iota_1 + \iota_2\Theta\iota_2 + \iota_3\Theta\iota_3) = -a.$$

Duidt men nu door X_2 de bekende invariant voor de functie Θ of χ^{-1} aan, dan blijkt dus, dat $a = X_2$, zoodat men ten slotte heeft

$$V(\Theta\iota_1 \,.\, \iota_2 + \iota_1\Theta\iota_2) = (X_2 - \Theta')\iota_3.$$

De hier ingevoerde grootheden Δ en X_2, die op Θ betrekking hebben, kunnen gemakkelijk ook onmiddellijk met de oorspronkelijke functie χ in verband gebracht worden. De oplossing van de vergelijking

$$d\sigma = \chi\, d\varrho = \alpha_1 S\nu_1\, d\varrho + \alpha_2 S\nu_2\, d\varrho + \alpha_3 S\nu_3\, d\varrho,$$

die de functie χ defineert, luidt namelijk [1])

$$d\varrho = \chi^{-1}\, d\sigma = \frac{V\nu_2\nu_3\, S\alpha_2\alpha_3\, d\sigma + V\nu_3\nu_1\, S\alpha_3\alpha_1\, d\sigma + V\nu_1\nu_2\, S\alpha_1\alpha_2\, d\sigma}{2\, S\alpha_1\alpha_2\alpha_3\, S\nu_1\nu_2\nu_3}$$

---

[1]) TAIT § 161; MOLENBROEK, § 183.

en volgens (14) is dus de rotatievector van χ^{-1}

$$\Delta = \frac{V(V\nu_2\nu_3\, V\alpha_2\alpha_3 + V\nu_3\nu_1\, V\alpha_3\alpha_1 + V\nu_1\nu_2\, V\alpha_1\alpha_2)}{2\, S\alpha_1\alpha_2\alpha_3\, S\nu_1\nu_2\nu_3}.$$

De noemer van deze breuk is het dubbel der negatieve waarde van de invariant x der functie χ. De teller kan volgens een bekende formule[1]) herleid worden tot den vorm

$$2(\alpha_1 S\nu_1\delta + \alpha_2 S\nu_2\delta + \alpha_3 S\nu_3\delta) = 2\chi\delta,$$

waarin δ de rotatievector van χ is. Derhalve

$$x\Delta = -\chi\delta$$

Volgens (16) is verder

$$X_2 = \frac{S(V\alpha_2\alpha_3\, V\nu_2\nu_3 + V\alpha_3\alpha_1\, V\nu_3\nu_1 + V\alpha_1\alpha_2\, V\nu_1\nu_2)}{S\alpha_1\alpha_2\alpha_3\, S\nu_1\nu_2\nu_3}$$
$$= \frac{x_1}{x},$$

als x_1 ook weder een invariant van χ is.

Wij keeren nu tot de formule (54) terug, die na het vorige de gedaante aanneemt

$$S.q\,[2\,S\iota_3\,\Delta + (X_2 + n - \Theta - \Theta')\,\iota_3] = 0$$

Hierin kan nog in den zin van vergelijking (11)

$$(\Theta + \Theta')\,\iota_3 = 2\,\Theta_0\,\iota_3$$

gesteld worden. Bovendien is volgens een bekende formule der theorie[2])

$$q = \gamma^t = \mathrm{Cos}\, t\frac{\pi}{2} + \gamma\, \mathrm{Sin}\, t\frac{\pi}{2},$$

zoodat de vorige vergelijking nu oplevert

$$S\iota_3\,\Delta + tg\left(t\frac{\pi}{2}\right) S.\gamma\left(\frac{X_2 + n}{2} - \Theta_0\right)\iota_3 = 0,$$

of ook

$$S\iota_3\,\Delta - tg\left(t\frac{\pi}{2}\right) S.\iota_3\left(\Theta_0 - \frac{X_2 + n}{2}\right)\gamma = 0.$$

Natuurlijk zal deze vergelijking zonder verdere wijziging geldig

---

[1]) TAIT, § 91; MOLENBROEK, § 88, formule (c. 43).

[2]) TAIT, Examples to Chapt. III; MOLENBROEK, § 83.

blijven, als men ι_3 door ι_1, en ι_2 achtereenvolgens vervangt; vermenigvuldigt men daarna de drie zoo verkregen vergelijkingen met ι_3, ι_1, ι_2, en sommeert de uitkomsten, dan ontstaat volgens de formule (1*), waarin α, β, γ door $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ vervangen worden,

$$\Delta = tg\, t \frac{\pi}{2}\left(\Theta_0 - \frac{X_2 + n}{2}\right)\gamma,$$

en eindelijk

$$\gamma\, tg\, t \frac{\pi}{2} = \left(\Theta_0 - \frac{X_2 + n}{2}\right)^{-1}\Delta.$$

Deze vergelijking bevat de volledige oplossing. Neemt men aan, dat de richting van de as der konische wenteling steeds zoo gekozen wordt, dat hare grootte $w = t\pi$ nooit meer dan 180° bedraagt, dan is dus

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= U.\left(\Theta_0 - \frac{X_2 + n}{2}\right)^{-1}\Delta \\ tg\frac{w}{2} &= T.\left(\Theta_0 - \frac{X_2 + n}{2}\right)^{-1}\Delta \end{aligned}\right\}$$

Alle in het tweede lid dezer vergelijkingen voorkomende grootheden kunnen volgens bekende formules uit de oorspronkelijke functie χ bepaald worden, zoodat hiermede inderdaad in het algemeenste geval de konische wenteling volledig beschreven is.

Natuurlijk moet de formule (55) voor de onderstellingen in § 8 dezer verhandeling ingevoeid ook de aldaar verkregen uitkomst opleveren. Men heeft dan bij aanwending der aldaar voorkomende notatie

$$\chi = 1 + u\varphi, \quad \chi^{-1} = \Theta = 1 - u\varphi, \quad t = \frac{hu}{\pi},$$

$$\Theta_0 = \tfrac{1}{2}(1 - u\varphi + 1 - u\varphi') = 1 - u\varphi_0,$$

$$X_2 = 3 - u x_2, \quad n = \sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} + \sqrt{m_3} = 3 - u x_2$$

$$\Delta = -u\delta,$$

waarin x_2 en δ bij de functie ψ behooren; alles bij verwaarloozing van oneindig kleinen hooger dan de eerste orde. Volgens (55) wordt nu

$$\frac{hu}{2}\gamma = -[-2 + u(x_2 - \varphi_0)]^{-1} u\delta = \tfrac{1}{2}u\delta;$$

derhalve evenals in § 8

$$h\gamma = \delta.$$

's-Hage, Juni 1893.

BOEKDRUKKERIJ
De Roever Kröber-Bakels.
AMSTERDAM.

DE VERSNELLINGEN

VAN

HOOGERE ORDEN

DOOR

Dr. G. SCHOUTEN.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

DEEL II. No. 5.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1894.

DE VERSNELLINGEN

VAN

HOOGERE ORDEN

DOOR

Dr. G. SCHOUTEN.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam

(EERSTE SECTIE.)

DEEL II. No. 5.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1894.

DE VERSNELLINGEN VAN HOOGERE ORDEN

DOOR

Dr. G. SCHOUTEN.

In de „Kinematik von J. SOMOFF", vertaald door ALEX. ZIWET, Leipzig 1878, worden op blz. 333, form. (2), de uitdrukkingen gegeven van de ontbondenen langs rechthoekige coördinaatassen van de versnelling der n^e orde, die een punt van een lichaam heeft, dat om een vast punt beweegt.

Zij drukken uit, dat de versnelling van de n^e orde de snelheid is van het vrije uiteinde des versnellingsvectors van de $(n-1)^e$ orde. Die snelheid wordt in twee andere ontbonden, de eerste is die, welke het uiteinde heeft tengevolge van de wenteling om de oogenblikkelijke as, de andere die, welke voorstelt de snelheid, waarmede de vector langer wordt. Deze laatste ontbondene wordt eenvoudig voorgesteld door de afgeleide van den vector naar den tijd.

Evenwel zal deze laatste ontbondene samenhangen met den bewegingstoestand van het lichaam, evenzoo als dit met de eerste het geval is. Ziet men de eerste ontbondene, zoodra men de oogenblikkelijke as en de hoeksnelheid om die as gegeven denkt, waar komt dan die $\frac{dv}{dt}$ van daan?

Die samenhang van de versnelling van eenige orde met de wentelingen om de verschillende hoekversnellingsassen heb ik nergens ontwikkeld gezien, noch in de leerboeken van RÉSAL of van SCHELL, noch in de Verhandelingen van J. SOMOFF of van CAMILLE JORDAN [1]).

[1]) J. SOMOFF, „Mémoire sur les accélérations de divers ordres" in T. VIII 1864 van Mémoires de l'Académie impériale de St. Pétersbourg.

CAMILLE JORDAN, „Sur le mouvement des figures dans le plan et dans l'espace" in Bulletin de la Société mathem. de France, T. I, 1872—73.

De beschouwingen in de volgende bladen bewegen zich uitsluitend op cinematisch gebied en hebben ten hoofddoel bovenbedoelden samenhang duidelijk in het licht te stellen. Evenals men den snelheidsvector van een willekeurig punt eens lichaams ziet, zoodra men zich de oogenblikkelijke as en de hoeksnelheid gegeven denkt, evenzoo ziet men, hoe de versnellingsvector van elke orde ontstaat als de resultante van componenten, waarvan er een door elk der hoekversnellingsassen op bepaalde wijze gegeven wordt.

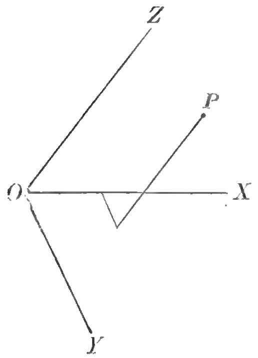
De wijze van behandeling, die overigens zuiver analytisch is, bracht mede, dat van de allereerste beginselen van de bewegingsleer werd uitgegaan. Op eenvoudige wijze blijkt, dat men spreken kan van het parallelogram en het parallelepipedum van versnellingen n^e orde, van hoekversnellingsassen n^e orde, dat eene verschuiving met eene versnelling α aequivalent is met een koppel van hoekversnellingen van dezelfde orde, welks vlak loodrecht staat op de versnelling en welks moment gelijk is aan die versnelling, onverschillig van welke orde die versnelling is.

Eindelijk blijkt, dat er in een lichaam, dat de meest algemeene beweging heeft, ieder oogenblik een punt kan aangewezen worden, dat *geene* versnelling n^e orde heeft, zoodat ter bepaling van de versnelling der overige punten dit punt als *vast* kan aangenomen worden. Slechts in bijzondere gevallen bestaat er eene rechte lijn, wier punten die eigenschap bezitten. Voor $n = 0$ geldt, zooals bekend is, die stelling niet, en treedt het genoemde bijzondere geval slechts dan in, wanneer het lichaam *geene* verschuiving heeft.

Beweging van een punt. Snelheid.

1. De plaats van een punt P zullen wij bepalen door zijne coördinaten op een recht- of scheefhoekig coördinatenstelsel $0XYZ$.

Die coördinaten $x\ y\ z$ bepalen volkomen den stand van dat punt ten opzichte van dat stelsel. Blijven de coordinaten voortdurend dezelfde, dan zegt men dat het punt ten opzichte van dat stelsel in *rust* is.



Veranderen ze daarentegen met den tijd, dan zegt men, dat het punt zich beweegt in dat stelsel, en noemt men de lijn, die het punt in dat stelsel beschrijft, de *baan* van het punt.

De beweging van elk der projecties van het punt langs de assen heet de ontbon-

dene van de beweging van het punt langs die assen, en omgekeerd heet de beweging van het punt de resultante van de drie bewegingen langs de assen.

De beweging van het punt zal volkomen bekend zijn, als de coördinaten bekende functies van den tijd zijn.

Wordt uit die drie functies de tijd geëlimineerd, dan verkrijgt men twee vergelijkingen tusschen de coördinaten

$$f\ (x, y, z) = 0$$
$$\varphi\ (x, y, z) = 0$$

die de vergelijkingen van de baan voorstellen.

2. Is die baan eene rechte lijn, dan noemt men de beweging rechtlijnig; de richting dier lijn is dan de richting der beweging.

Het spreekt van zelf, dat als de rechtlijnige baan zelve gegeven is, de beweging van het punt ook bekend zal zijn, als zijn afstand s van een vast punt der baan ieder oogenblik bekend is.

Is de baan eene kromme lijn, dan wordt de beweging kromlijnig genoemd. In dat geval is de raaklijn aan de baan de richting der beweging op het oogenblik, dat het punt in het raakpunt is.

Is die baan gegeven, dan ook zal de beweging bekend zijn, als men voor ieder oogenblik de lengte s van het deel der baan kent, dat het punt van een vast punt op de baan scheidt.

3. De eenvoudigste beweging is die, waarbij de lengte van den doorloopen weg evenredig is met den daarvoor benoodigden tijd. Zulk een beweging heet eenparig. Ze is volkomen bepaald, als men de baan weet, de plaats, die het punt op zeker oogenblik daarop inneemt en de lengte van den weg, door het punt in een bepaalden tijd afgelegd. Neemt men voor dat tijdsverloop de tijdseenheid, dan noemt men de lengte van den weg, in de tijdseenheid afgelegd, de snelheid van de eenparige beweging. Wordt dus in t tijdseenheden een weg van s lengte-eenheden afgelegd, dan is de snelheid $v = \frac{s}{t}$, dus $s = vt$.

De afgeleide $\frac{ds}{dt}$ van de doorloopen ruimte naar den tijd is dus standvastig en gelijk aan de snelheid.

4. De eenparige rechtlijnige beweging wordt meetkundig voorgesteld door eene lijn, uit een willekeurig punt als oorsprong getrokken in de richting der beweging en waaraan eene lengte gegeven wordt gelijk aan het aantal lengte-eenheden van de snelheid. Zulk eene lijn heet de *snelheidsvector* van de beweging.

Weet men dus behalve de plaats, die het punt op een gegeven

oogenblik inneemt, ook den snelheidsvector van eene eenparige rechtlijnige beweging, dan is deze volkomen bekend.

Is de beweging kromlijnig eenparig, dan ook zal de bewegingstoestand van het punt ieder oogenblik kunnen voorgesteld worden door eene lijn, getrokken in de richting van de raaklijn aan de baan, in het punt waar het bewegende punt zich op dat oogenblik bevindt, en waarvan de lengte gelijk genomen wordt aan het aantal lengte-eenheden van de snelheid.

Die lijn wordt ook de snelheidsvector van de kromlijnige eenparige beweging op dat oogenblik genoemd.

De vector zal op verschillende oogenblikken verschillende richtingen hebben. Worden alle vectoren uit een vast punt als gemeenschappelijken oorsprong getrokken, dan zullen de uiteinden er van op een boloppervlak gelegen zijn met den oorsprong tot middelpunt.

5. Is de afgelegde weg niet evenredig met den daartoe besteden tijd, dan heet de beweging veranderlijk. Ter bepaling van den bewegingstoestand van een punt, dat eene veranderlijke beweging heeft, vergelijkt men dien met den bewegingstoestand eener eenparige beweging.

Bevindt zich het bewegende punt op zeker oogenblik t van de beweging in het punt A van de baan, en is het na verloop van eenigen tijd Δt gekomen in B, zoodat het den boog $AB = \Delta s$ heeft afgelegd, dan is $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ de snelheid, waarmede een ander punt P', uit A vertrokken, zich zou hebben moeten bewegen om na verloop van denzelfden tijd Δt ook in B aan te komen. In de onderstelling, dat P en P' op 't zelfde oogenblik vertrekken uit A, zullen ze gedurende den tijd Δt niet te gelijker tijd op dezelfde plaats zijn, alleen wel in B.

De verhouding $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ heet de gemiddelde snelheid van het punt P op het oogenblik t gedurende den tijd Δt. Zij bepaalt in geenen deele den bewegingstoestand van het punt op het oogenblik t, daar ze afhangt van de verschillende bewegingstoestanden gedurende den tijd Δt.

Wil men dus den bewegingstoestand op het oogenhlik t zelf meten, dan moet in $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ tot de limiet 0 voor Δt worden overgaan. Dan wordt $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ gelijk aan de afgeleide $\frac{ds}{dt}$ van den afgelegden weg naar den tijd. Die afgeleide heet de snelheid van de beweging op het tijdstip t.

De snelheid eener veranderlijke beweging op zeker oogenblik t is de grenswaarde van de gemiddelde snelheid op dat oogenblik en wordt gegeven door de afgeleide $\frac{ds}{dt}$ van den afgelegden weg naar den tijd.

6. Evenals bij de eenparige beweging kan de bewegingstoestand van het punt ieder oogenblik worden voorgesteld door den snelheidsvector van het punt.

Parallelepipedum van snelheden.

7. Worden de vergelijkingen van de baan

$$f(x, y, z) = 0$$
$$\varphi(x, y, z) = 0$$

naar t gedifferentieerd, dan geeft dit

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Hieruit volgt:

$$\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} : \frac{dz}{dt} :: \left| \begin{matrix} f'_x, & f'_y, & f'_z \\ \varphi'_x, & \varphi'_y, & \varphi'_z \end{matrix} \right|,$$

waaruit blijkt, dat de snelheden van de ontbondenen der beweging evenredig zijn met de richtingscoefficienten van de raaklijn der baan; bijgevolg zullen de projecties van den snelheidsvector op de assen de snelheidsvectoren van de overeenkomstige ontbondenen der beweging geven.

Beschrijft men dus een parallelepipedum, dat den snelheidsvector tot lichaamsdiagonaal heeft, dan zullen de in den oorsprong van dien vector samenkomende ribben de vectoren voorstellen van de ontbondenen der beweging langs die ribben, en omgekeerd.

Dit parallelepipedum heet het *parallelepipedum van snelheden*. Het gaat over in het *parallelogram van snelheden*, als de beweging slechts in twee andere ontbonden wordt, die dan met de beweging zelve in het osculatievlak van de baan plaats grijpen.

Versnellingen.

8. De uitdrukking $\frac{d^2 x}{dt^2}$ kan beschouwd worden als de snelheid die het punt $\left(x + \frac{dx}{dt}, 0, 0\right)$ boven die van het punt $(x, 0, 0)$ heeft; m.a.w.

$\frac{d^2x}{dt^2}$ stelt voor de snelheid van het uiteinde van den snelheidsvector bij de beweging langs de X-as boven die van zijn oorsprong. Wordt de snelheidsvector uit een vast punt getrokken, dan is dus $\frac{d^2x}{dt^2}$ de snelheid van het vrije uiteinde des vectors. Evenzoo is $\frac{d^2y}{dt^2}$ de snelheid van het vrije uiteinde van den snelheidsvector der beweging langs de Y-as, $\frac{d^2z}{dt^2}$ die van de beweging langs de Z-as, als n.l. de snelheidsvectoren uit een vast punt als oorsprong getrokken worden, wat we voortaan zullen onderstellen.

Volgens het parallelepipedum van snelheden is de resultante van die drie snelheden gelijk aan de snelheid, waarmede het vrije uiteinde $\left(x + \frac{dx}{dt}, y + \frac{dy}{dt}, z + \frac{dz}{dt}\right)$ van den snelheidsvector van het bewegend punt zich beweegt.

Men noemt $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ de versnellingen van de bewegingen resp. langs de X, Y, Z-assen, en de resultante de versnelling van het bewegende punt P.

Deze laatste moet gelegen zijn in het osculatievlak van de baan, omdat daarin de vector van het punt beweegt.

Volgens het parallelogram van snelheden kunnen we de snelheid van het uiteinde des vectors ontbinden in twee andere, de eene in de richting des vectors, die dus de snelheid meet, waarmede de vector langer wordt, en volgens de raaklijn der baan is gericht; de andere in eene richting loodrecht daarop, die een gevolg is van de richtingsverandering des vectors en dus gericht is volgens den kromtestraal ϱ der baan.

De eerste heet de tangentiale versnelling, en is gelijk aan $\frac{dv}{dt}$ of $\frac{d^2s}{dt^2}$; de andere heet de normale ontbondene en is gelijk aan $\frac{v^2}{\varrho}$. Want omdat $\varrho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{v}{\frac{d\theta}{dt}}$ dus $\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{\varrho}$ is, draait de raaklijn met eene hoeksnelheid $\frac{v}{\varrho}$ en is dien ten gevolge de snelheid, waarmede het uiteinde van den vector v beweegt, als deze niet in lengte verandert, $v \times \frac{v}{\varrho} = \frac{v^2}{\varrho}$.

Daar de versnelling de snelheid meet van het vrije uiteinde des snelheidsvectors, kan zij ook door een vector worden voorgesteld. Zulk een vector zullen wij een *versnellingsvector* noemen.

9. Nu kunnen de uitdrukkingen $\frac{d^3 x}{dt^3}$, $\frac{d^3 y}{dt^3}$, $\frac{d^3 z}{dt^3}$ beschouwd worden als de snelheden resp. van de vrije uiteinden der versnellingsvectoren der bewegingen langs de X, Y, Z-assen. Zij heeten de versnellingen van de 2e orde der ontbondene bewegingen en hunne resultante de versnelling van de beweging van het punt.

Volgens het parallelepipedum van snelheden zal die resultante gelijk zijn aan de snelheid van het vrije uiteinde des versnellingsvectors. Zooals we boven reeds vonden draait deze in het osculatievlak, dus om den binormaal als as, met de hoeksnelheid $\frac{v}{\varrho}$, terwijl het osculatievlak zelf om de raaklijn gedraaid wordt met eene hoeksnelheid $\frac{v}{\varrho_1}$, als ϱ_1 de wringingsstraal der kromme is. Immers $\varrho_1 = \frac{ds}{d\varepsilon} = \frac{v}{\frac{d\varepsilon}{dt}}$, dus $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{v}{\varrho_1}$ stelt de hoeksnelheid voor, waarmede het osculatievlak om de raaklijn der baan wentelt.

Volgens het parallelepipedum van snelheden is de snelheid van het uiteinde des vectors gelijk aan de resultante van de snelheden, waarmede de uiteinden der vectoren harer ontbondenen $\frac{d^2 s}{dt^2}$ en $\frac{v^2}{\varrho}$ zich bewegen.

We vinden dus:

tangentiale versnelling 2e orde $= \frac{d^3 s}{dt^3} - \frac{v}{\varrho} \cdot \frac{v^2}{\varrho}$

normale „ 2e „ $= \frac{d\frac{v^2}{\varrho}}{dt} + \frac{v}{\varrho} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{1}{v} \frac{d\frac{v^3}{\varrho}}{dt}$

binormale „ 2e „ $= \frac{v}{\varrho_1} \cdot \frac{v^2}{\varrho}$.

10. Op dezelfde wijze kan voortgegaan worden. Noemt men $\frac{d^n x}{dt^n}$ (de snelheid van het uiteinde des versnellingsvectors van de $(n-1)$e orde bij de beweging langs de X-as), de versnelling van de ne orde dier beweging, evenzoo $\frac{d^n y}{dt^n}$ de versnelling van de ne orde van de beweging langs de Y-as, $\frac{d^n z}{dt^n}$ die van de beweging langs de

Z-as, en hunne resultante (= snelheid vrije uiteinde van den versnellingsvector $(n-1)^e$ orde) de versnelling n^e orde van de beweging van het punt, dan kan deze weer vervangen worden door de snelheden, waarmede de vrije uiteinden van de versnellingsvectoren der $(n-1)^e$ orde der ontbondenen worden bewogen door de wenteling om den binormaal met de hoeksnelheid $\frac{v}{\varrho}$ en de wenteling om de raaklijn met de hoeksnelheid $\frac{v}{\varrho_1}$.

Is dus $\overset{n}{\alpha}$ de versnelling van de n^e orde, en $\overset{n}{\alpha}_t$ de tangentiale, $\overset{n}{\alpha}_N$ de normale, $\overset{n}{\alpha}_B$ de binormale ontbondene, dan geldt algemeen de betrekking [1]:

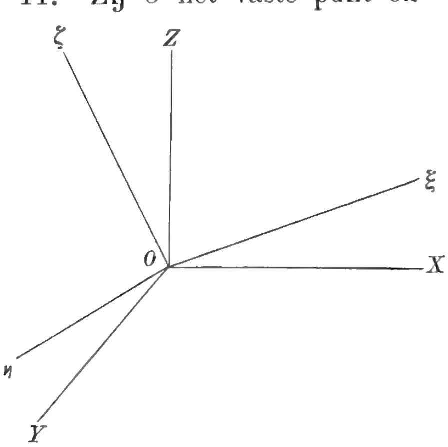
$$\overset{n}{\alpha}_t = \frac{d\,\overset{n-1}{\alpha}_t}{dt} - \overset{n-1}{\alpha}_N \cdot \frac{v}{\varrho}$$

$$(1) \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; \overset{n}{\alpha}_N = \frac{d\,\overset{n-1}{\alpha}_N}{dt} + \overset{n-1}{\alpha}_t \cdot \frac{v}{\varrho} - \overset{n-1}{\alpha}_B \cdot \frac{v}{\varrho_1}$$

$$\overset{n}{\alpha}_B = \frac{d\,\overset{n-1}{\alpha}_B}{dt} + \overset{n-1}{\alpha}_N \cdot \frac{v}{\varrho_1}.$$

Beweging van een vast lichaam om een vast punt.

11. Zij O het vaste punt en $O\,X\,Y\,Z$ een vast rechthoekig assenstelsel. Laat $O\,\xi\,\eta\,\zeta$ een met het bewegend lichaam verbonden assenstelsel wezen, welks stand op zeker oogenblik t van de beweging aangegeven wordt door de cosinussen van de hoeken, die elke der beweeglijke assen maakt met ieder der vaste assen, zooals nevensstaand tabelletje dat aanwijst. b. v. $\cos X\xi = a$, $\cos\,(Z\,\eta) = b_{\prime\prime}$.



[1]) Reeds gegeven door Somoff, Kinematik bl. 60. (6).

$$\begin{array}{c|ccc} & X & Y & Z \\ \hline \xi & a & a_{\prime} & a_{\prime\prime} \\ \eta & b & b_{\prime} & b_{\prime\prime} \\ \zeta & c & c_{\prime} & c_{\prime\prime} \end{array}$$

De determinant $\begin{vmatrix} a & a_{\prime} & a_{\prime\prime} \\ b & b_{\prime} & b_{\prime\prime} \\ c & c_{\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix}$ is gelijk $+ 1$, als het assenstelsel $O\,\xi\,\eta\,\zeta$ zóó geplaatst kan worden op het assenstelsel $O\,X\,Y\,Z$, dat de gelijknamige positieve assen elkaar bedekken, wat wij onderstellen zullen dat het geval is. Verder is elke term van de niet ontwikkelde determinant gelijk aan zijn coefficient in de ontwikkelde;

b.v. $c_{\prime} = \begin{vmatrix} a_{\prime\prime} & a \\ b_{\prime\prime} & b \end{vmatrix}$, want $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ c & c_{\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & a_{\prime} & a_{\prime\prime} \\ b & b_{\prime} & b_{\prime\prime} \\ c & c_{\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{\prime\prime} & b_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ of $c_{\prime} = \begin{vmatrix} a_{\prime\prime} & b_{\prime\prime} \\ a & b \end{vmatrix}$.

12. Zijn nu op 't oogenblik t van de beweging de coördinaten van een punt van 't lichaam (x, y, z) op het vaste, (ξ, η, ζ) op het beweeglijk assenstelsel, dan bestaan er tusschen deze de volgende betrekkingen:

$$\begin{aligned} x &= a\ \xi + b\ \eta + c\ \zeta \\ y &= a_{\prime}\ \xi + b_{\prime}\ \eta + c_{\prime}\ \zeta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ z &= a_{\prime\prime}\ \xi + b_{\prime\prime}\ \eta + c_{\prime\prime}\ \zeta \end{aligned}$$

De snelheid v van dat punt wordt dan op dat oogenblik bepaald door de ontbondenen $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ of x', y', z'. *We zullen n.l. de eerste afgeleide naar t door één accent, de tweede afgeleide door twee accenten enz. voorstellen.*

$$\begin{aligned} x' &= a'\ \xi + b'\ \eta + c'\ \zeta \\ y' &= a'_{\prime}\ \xi + b'_{\prime}\ \eta + c'_{\prime}\ \zeta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ z' &= a'_{\prime\prime}\ \xi + b'_{\prime\prime}\ \eta + c'_{\prime\prime}\ \zeta \end{aligned}$$

13. De oorsprong (0, 0, 0) is in rust. Zijn er nog meer punten in rust? Het bestaan dier punten hangt natuurlijk af van de determinante $\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'_{\prime} & b'_{\prime} & c'_{\prime} \\ a'_{\prime\prime} & b'_{\prime\prime} & c'_{\prime\prime} \end{vmatrix}$. Is die identiek nul, dan zijn bovenstaande vergelijkingen, wier eerste leden in nullen moeten veranderd worden, onderling afhankelijk; in het tegengestelde geval niet.

Nu is die determinante identiek gelijk nul; want wordt ze vermenigvuldigd met $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_{\prime} & b_{\prime} & c_{\prime} \\ a_{\prime\prime} & b_{\prime\prime} & c_{\prime\prime} \end{vmatrix} = 1$, daarbij met de kolommen werkende, dan vindt men voor het produkt:

$$\begin{vmatrix} o & -r & q \\ r & o & -p \\ -q & p & o \end{vmatrix}$$

als

$$\begin{aligned} b'c + b'_{,}c_{,} + b'_{,,}c_{,,} &= -bc' - b_{,}c'_{,} - b_{,,}c'_{,,} = p \\ c'a + c'_{,}a_{,} + c'_{,,}a_{,,} &= -ca' - c_{,}a'_{,} - c_{,,}a'_{,,} = q \\ a'b + a'_{,}b_{,} + a'_{,,}b_{,,} &= -ab' - a_{,}b'_{,} - a_{,,}b'_{,,} = r \end{aligned}$$

gesteld worden. Dat produkt nu is identiek gelijk nul.

De vergelijkingen (3) kunnen nu als volgt geschreven worden:

$$(4) \ldots \quad \begin{aligned} -\eta r + \zeta q &= ax' + a_{,}y' + a_{,,}z' = v_\xi = \text{snelheid volgens de } \xi\text{-as}, \\ \xi r - \zeta p &= bx' + b_{,}y' + b_{,,}z' = v_\eta = \quad " \quad " \quad " \ \eta\text{-as}, \\ -\xi q + \eta p &= cx' + c_{,}y' + c_{,,}z' = v_\zeta = \quad " \quad " \quad " \ \zeta\text{-as}. \end{aligned}$$

of in determinantvorm:

$$(5) \ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} q & r \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} = v_\xi \qquad \begin{vmatrix} r & p \\ \zeta & \xi \end{vmatrix} = v_\eta \qquad \begin{vmatrix} p & q \\ \xi & \eta \end{vmatrix} = v_\zeta$$

Wij maken uit deze vergelijkingen de volgende gevolgtrekkingen:

1°. De punten van 't lichaam, die in rust zijn, liggen op de lijn Ω, wier vergelijking is:

$$(6) \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r}.$$

De beweging is op 't beschouwde oogenblik dus aequivalent met eene wenteling om de lijn Ω, die daarom de *oogenblikkelijke as* heet. Zij maakt met de assen hoeken, wier cosinussen $\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}, \frac{r}{\omega}$ zijn, als $\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2$ gesteld wordt.

2°. Worden uit (4) ξ, η, ζ opgelost, dan vindt men b. v. voor ξ:

$$\xi \begin{vmatrix} o & -r & q \\ r & o & -p \\ -q & p & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_\xi & -r & q \\ v_\eta & o & -p \\ v_\zeta & p & o \end{vmatrix} = p\,(p v_\xi + q v_\eta + r v_\zeta) = 0$$

dus

$$\frac{p}{\omega} \cdot \frac{v_\xi}{v} + \frac{q}{\omega} \cdot \frac{v_\eta}{v} + \frac{r}{\omega} \cdot \frac{v_\zeta}{v} = \operatorname{Cos}(\Omega, v) = 0.$$

$3^0.\ v^2 = v^2_\xi + v^2_\eta + v^2_\zeta = \begin{vmatrix} p & q & r \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} p^2+q^2+r^2\,, & p\xi+q\eta+r\zeta \\ p\xi+q\eta+r\zeta\,, & \xi^2+\eta^2+\zeta^2 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} \omega^2 & \omega r \cos(\Omega r) \\ \omega r \cos(\Omega r), & r^2 \end{vmatrix} = \omega^2 r^2 \sin^2(\Omega r) = \omega^2 l^2$$

als l de lengte is van de loodlijn, uit het punt op de as Ω neergelaten en r voorstelt den afstand van het punt tot den oorsprong. Omdat ω de snelheid is van een punt, dat op de eenheid van afstand van Ω ligt, heet ω de *hoeksnelheid* van de wenteling om Ω.

Hieruit blijkt, dat de beweging op 't beschouwde oogenblik aequivalent is met eene wenteling om de as Ω, waarvan de hoeksnelheid gelijk ω is.

14. Uit de vergel. (5) volgt, dat p de snelheid voorstelt van het punt (0, 1, 0) in de richting van de ζ-as, of die van het punt (0, 0, 1) in de richting van de $-\eta$-as. Men mag dus p beschouwen als de hoeksnelheid, waarmede het lichaam om de ζ-as wentelt. Evenzoo blijkt, dat q de hoeksnelheid is van de wenteling om de η-as, en r die van de wenteling om de ζ-as.

De wenteling om de oogenblikkelijke as Ω met de hoeksnelheid ω is dus aequivalent met de drie wentelingen p, q, r, om de beweeglijke assen. Wordt dus op de as Ω een stuk afgezet gelijk aan ω lengte-eenheden, dan zullen de projecties van dat stuk op de beweeglijke assen p, q, r eenheden bevatten, zoodat lijnen, die aswentelingen in grootte en richting voorstellen samengesteld en ontbonden kunnen worden volgens dezelfde regels als lijnen, die snelheden en versnellingen voorstellen.

Men spreekt daarom ook van het *parallelogram* en het *parallelepipedum van wentelingsassen.*

Hoekversnellingsas.

15. Worden de vergel. (5) naar t gedifferentieerd, dan komt er

$$\frac{dv_\xi}{dt} = \xi'' = \begin{vmatrix} q' & r' \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q & r \\ \eta' & \zeta' \end{vmatrix}$$

$$\eta'' = \begin{vmatrix} r' & p' \\ \zeta & \xi \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r & p \\ \zeta' & \xi' \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (7)$$

$$\zeta'' = \begin{vmatrix} p' & q' \\ \xi & \eta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q \\ \xi' & \eta' \end{vmatrix}$$

Hieruit blijkt, dat de versnelling van het punt ξ, η, ζ de resultante is van twee andere:

1^0. De versnelling

$$\sqrt{\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} p'^2 + q'^2 + r'^2, & p'\xi + q'\eta + r'\zeta \\ p\,\xi + q'\eta + r'\zeta, & \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \omega_1 R \sin (\Omega_1 R) = \omega_1 l_1,$$

als R de afstand van het punt tot den oorsprong, l_1 die tot de lijn $\Omega_1 \left(\frac{\xi}{p'} = \frac{\eta}{q'} = \frac{\zeta}{r'}\right)$ voorstellen en $\omega_1^2 = p'^2 + q'^2 + r'^2$ gesteld wordt.

Zij staat loodrecht zoowel op Ω_1 $\left(\text{want} \begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p' & q' & r' \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = 0\right)$ als op R $\left(\text{want ook} \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ p' & q' & r' \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = 0\right)$, is dus loodrecht gericht op het vlak bepaald door het punt en de lijn Ω_1.

Omdat ω_1 de versnelling is van een punt op de eenheid van afstand tot de as Ω_1, heet ω_1 de *hoekversnelling* om de as Ω_1, die daarom de *hoekversnellingsas* genoemd wordt.

2^0. De versnelling $\sqrt{\begin{vmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ p & q & r \end{vmatrix}^2} = \omega\, v \sin (\Omega\; V) = \omega\; v = \omega^2\, l$ loodrecht gericht zoowel op Ω als op den snelheidsvector V, en omdat Ω en V elkaar rechthoekig kruissen, zal de versnelling loodrecht op Ω gericht wezen, en wel *naar* de as Ω, omdat zij gericht is in den zin van de wenteling om Ω.

16. p' stelt de versnelling voor van het punt (0, 1, 0) in de richting van de ζ-as of van het punt (0, 0, 1) in de richting van de η-as. De hoekversnelling ω_1 om de as Ω_1 is dus aequivalent met de drie hoekversnellingen p' q' r' om de beweeglijke assen. Men spreekt daarom ook van het *parallelogram* en het *parallelepipedum* van hoekversnellingsassen.

17. De Cosinus van den hoek tusschen Ω en Ω_1 wordt gegeven door

$$\text{Cos}\,(\Omega\, \Omega_1) = \frac{pp' + qq' + rr'}{\omega\, \omega_1} = \frac{\omega\omega'}{\omega\omega_1} = \frac{\omega'}{\omega_1}.$$

Vallen dus die assen samen, dan is de hoekversnelling ω_1 gelijk aan de afgeleide ω' van de hoeksnelheid naar den tijd. Vallen ze niet samen, dan is de ontbondene van ω_1 volgens Ω gelijk aan deze afgeleide.

HOEKVERSNELLINGSASSEN VAN HOOGERE ORDEN.

1 . Worden (7) nog eens naar t gedifferentieerd, dan vindt men

$$
\begin{aligned}
\xi''' &= \begin{vmatrix} q'' & r'' \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} q' & r' \\ \eta' & \zeta' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q & r \\ \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix} \\
\eta''' &= \begin{vmatrix} r'' & p'' \\ \zeta & \xi \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} r' & p' \\ \zeta' & \xi' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r & p \\ \zeta & \xi \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots (8) \\
\zeta''' &= \begin{vmatrix} p'' & q'' \\ \xi & \eta \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} p' & q' \\ \eta' & \xi' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q \\ \xi'' & \eta'' \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Hieruit leest men drie componenten van de versnelling der 2e orde, n.l.

1⁰. Eene gelijk $\sqrt{\begin{vmatrix} p'' & q'' & r'' \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}^2} = \omega_2 \, R \sin(\Omega_2 \, R) = \omega_2 \, l_2$, als $\omega_2^2 = p''^2 + q''^2 + r''^2$ gesteld wordt en l_2 de afstand is van het punt tot de lijn Ω_2 $\left(\frac{\xi}{p''} = \frac{\eta}{q''} = \frac{\zeta}{r''}\right)$. Zij is loodrecht gericht zoowel op Ω_2 als op R, dus loodrecht op het vlak bepaald door het punt en Ω_2.

2⁰. Een tweede gelijk $2\sqrt{\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ \xi' & \eta' & \zeta' \end{vmatrix}^2} = 2 \, \omega_1 \, v \sin(\Omega \, V)$. Deze is loodrecht gericht zoowel op Ω als op V, dus loodrecht op het vlak bepaald door Ω en V. Zij stelt dus de versnelling voor van het vrije uiteinde van den snelheidsvector V ten gevolge van de hoekversnelling ω_1 om de as Ω_1. Zij is loodrecht gericht op het vlak bepaald door Ω_1 en V in den zin van de hoekversnelling ω_1.

3⁰. Eene derde gelijk $\sqrt{\begin{vmatrix} \xi'' & \eta'' & \zeta'' \\ p & q & r \end{vmatrix}^2} = \omega \, \acute{\alpha} \sin(\Omega \, \acute{\alpha})$ waar $\acute{\alpha}$ den versnellingsvector van de eerste orde van het punt voorstelt. Zij is loodrecht gericht zoowel op Ω als op $\acute{\alpha}$, dus loodrecht op het vlak door Ω en $\acute{\alpha}$ bepaald, in den zin van de wenteling om Ω. Zij stelt de snelheid van het vrije uiteinde van den versnellingsvector van de eerste orde voor ten gevolge van de wenteling om de oogenblikkelijke as Ω.

De hoek tusschen Ω_1 en Ω_2 wordt gegeven door

$$\operatorname{Cos}(\Omega_1 \, \Omega_2) = \frac{p' p'' + q' q'' + r' r''}{\omega_1 \, \omega_2} = \frac{\omega_1 \, \omega_1'}{\omega_1 \, \omega_2} = \frac{\omega_1'}{\omega_2}.$$

Valt dus Ω_2 samen met Ω_1, dan is de hoekversnelling ω_2 van de 2ᵉ orde de afgeleide ω_1' van de hoekversnelling ω_1 van de 1ᵉ orde; valt ze er niet mede samen, dan is de ontbondene $\omega_2 \cos(\Omega_2 \, \Omega_1)$

van ω_2 volgens Ω_1 gelijk aan die afgeleide. Men kan n.l. ook spreken van het *parallelogram* en het *parallelepipedum* van hoekversnellingsassen van de 2e orde, aangezien de hoekversnelling ω_2 om de as Ω_2 aequivalent is met de drie hoekversnellingen p'', q'', r'' om de beweeglijke assen.

19. Het is duidelijk, dat men voort kan gaan met de vergelijkingen (8) naar den tijd te differentieeren, deze nieuwe weer enz., waardoor de versnellingen van de 3e, 4e orde enz. zullen gevonden worden. Men vindt voor de ontbondenen $\overset{n}{\alpha}_\xi = \xi^{(n+1)}$, $\overset{n}{\alpha}_\eta = \eta^{(n+1)}$, $\overset{n}{\alpha}_\zeta = \zeta^{(n+1)}$ van de versnelling α^n van de n^e orde de uitdrukkingen:

$$\begin{aligned}
\overset{n}{\alpha}_\xi &= \sum_{m=o}^{m=n} \binom{n}{m} \begin{vmatrix} q^{(n-m)} & r^{(n-m)} \\ \eta^{(m)} & \zeta^{(m)} \end{vmatrix} \\
\overset{n}{\alpha}_\eta &= \sum_{m=o}^{m=n} \binom{n}{m} \begin{vmatrix} r^{(n-m)} & p^{(n-m)} \\ \zeta^{(m)} & \xi^{(m)} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9) \\
\overset{n}{\alpha}_\zeta &= \sum_{m=o}^{m=n} \binom{n}{m} \begin{vmatrix} p^{(n-m)} & q^{(n-m)} \\ \xi^{(m)} & \eta^{(m)} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

waarin $\binom{n}{m}$ de m^e binomiaalcoefficient van de n^e macht is. Hieruit volgt:

$$\overset{n}{\alpha} = \text{Resultante} \left\{ \omega_n\, l_n \,,\, \binom{n}{m} \omega_{n-m} \overset{m-1}{\alpha} \sin\left(\Omega_{n-m}\, \overset{m-1}{\alpha}\right) \right\},\ m = \\
= 1, 2, 3, \ldots n \;\ldots\ldots (10)$$

als $\binom{n}{o} = 1$, $\omega_0 = \omega$, $\alpha^0 = v$ genomen wordt; of in woorden:

De versnelling van de n^e orde is de resultante van $(n+1)$ componenten; eene loodrecht op het vlak bepaald door het punt en de versnellingsas Ω_n van de n^e orde $\left(\frac{\xi}{p^{(n)}} = \frac{\eta}{q^{(n)}} = \frac{\zeta}{r^{(n)}}\right)$, *en gelijk aan* $\omega_n\, l_n \left(\omega_n^2 = p^{(n)\,2} + q^{(n)\,2} + r^{(n)\,2}\right.$ en l_n = afstand van het punt tot de as $\left.\Omega_n\right)$ *en n componenten* $\binom{n}{m} \omega_{n-m}\, \overset{m-1}{\alpha} \sin\left(\Omega_{n-m}\, \overset{m-1}{\alpha}\right)$, $(m = 1, 2, \ldots n)$, *ieder loodrecht gericht op het vlak, bepaald door de overeenkomstige hoekversnellingsas Ω_{n-m} en den versnellingsvector* $\overset{m-1}{\alpha}$.

Verder is het duidelijk, dat men spreken kan van het *parallelogram* en het *parallelepipedum van hoekversnellingsassen van iedere orde.*

VRIJE BEWEGING VAN EEN LICHAAM.

20. Laat de oorsprong van het met het bewegend lichaam vast verbonden assenstelsel $O\,\xi\,\eta\,\zeta$ op het tijdstip t $x_0\,y_0\,z_0$ tot coördinaten op de vaste assen hebben, zoodat de transformatie formules nu zijn:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a\,\xi + b\,y + c\,\zeta \\ y &= y_0 + a_{,}\,\xi + b_{,}\,y + c_{,}\,\zeta \\ z &= z_0 + a_{,,}\,\xi + b_{,,}\,y + c_{,,}\,\zeta. \end{aligned}$$

Worden dus in (2) x, y, z vervangen dan $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, dan vindt men bovenstaande vergelijkingen. Deze kunnen geschreven worden als volgt:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} q & r \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} &= v_\xi - v^0{}_\xi \\ \begin{vmatrix} r & p \\ \zeta & \xi \end{vmatrix} &= v_\eta - v^0{}_\eta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11) \\ \begin{vmatrix} p & q \\ \xi & \eta \end{vmatrix} &= v_\zeta - v^0{}_\zeta \end{aligned}$$

waar v^0 de snelheid van den beweeglijken oorsprong voorstelt en $v^0{}_\xi$, $v^0{}_\eta$, $v^0{}_\zeta$, hare ontbondenen volgens de beweeglijke assen.

Hieruit volgt:

1°. $p\,(v_\xi - v^0{}_\xi) + q\,(v_\eta - v^0{}_\eta) + r\,(v_\zeta - v^0{}_\zeta) = \begin{vmatrix} p & q & r \\ p & q & r \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = 0$

zoodat de uitdrukking $pv_\xi + qv_\eta + rv_\zeta$ voor alle punten van het lichaam dezelfde waarde heeft, dus ook $\frac{p}{\omega} v_\xi + \frac{q}{\omega} v_\eta + \frac{r}{\omega} v_\zeta$ of de projectie van de snelheid op de oogenblikkelijke as Ω.

2°. dat de snelheid v de resultante is van v^0 en $\omega\, l$.

De beweging van het lichaam is dus aequivalent met eene wenteling om de oogenblikkelijke as Ω $\left(\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r}\right)$ met de hoeksnelheid ω en eene verplaatsing van het lichaam, waarbij elk punt de snelheid v^0 heeft, welke verplaatsing wij eene verschuiving met de snelheid v^0 zullen noemen. De snelheid van elk punt heeft tot ontbondene in de richting van de oogenblikkelijke as eene snelheid gelijk $v^0 \cos(\Omega\, v^0)$, die wij T zullen noemen.

21. Zijn er punten, wier snelheid gelijk T is?

De coördinaten van zulke punten moeten voldoen aan de vergelijkingen:

$$\begin{vmatrix} q & r \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} = \frac{p}{\omega^2}(p\,v^0_\xi + q\,v^0_\eta + r\,v^0_\zeta) - v^0_\xi = \frac{p}{\omega^2}(q\,v^0_\eta + r\,v^0_\zeta) - \frac{q^2+r^2}{\omega^2}\,v^0_\xi$$

$$\begin{vmatrix} r & p \\ \zeta & \xi \end{vmatrix} = \frac{q}{\omega^2}(p\,v^0_\xi + q\,v^0_\eta + r\,v^0_\zeta) - v^0_\eta$$

$$\begin{vmatrix} p & q \\ \xi & \eta \end{vmatrix} = \frac{r}{\omega^2}(p\,v^0_\xi + q\,v^0_\eta + r\,v^0_\zeta) - v^0_\zeta$$

welke ook als volgt kunnen geschreven worden:

$$q\left(\zeta - \begin{vmatrix} p & q \\ v^0_\xi & v^0_\eta \end{vmatrix} : \omega^2\right) = r\left(\eta - \begin{vmatrix} r & p \\ v^0_\zeta & v^0_\xi \end{vmatrix} : \omega^2\right)$$

$$r\left(\xi - \begin{vmatrix} q & r \\ v^0_\eta & v^0_\zeta \end{vmatrix} : \omega^2\right) = p\left(\zeta - \begin{vmatrix} p & q \\ v^0_\xi & v^0_\eta \end{vmatrix} : \omega^2\right)$$

$$p\left(\eta - \begin{vmatrix} r & p \\ v^0_\zeta & v^0_\xi \end{vmatrix} : \omega^2\right) = q\left(\xi - \begin{vmatrix} q & r \\ v^0_\eta & v_{0\zeta} \end{vmatrix} : \omega^2\right)$$

zoodat de gevraagde punten liggen op de lijn

$$\frac{\xi - \begin{vmatrix} q & r \\ v^0_\eta & v^0_\zeta \end{vmatrix} : \omega^2}{p} = \frac{\eta - \begin{vmatrix} r & p \\ v^0_\zeta & v^0_\xi \end{vmatrix} : \omega^2}{q} = \frac{\zeta - \begin{vmatrix} p & q \\ v^0_\xi & v^0_\eta \end{vmatrix} : \omega^2}{r}$$

eene lijn dus evenwijdig aan de oogenblikkelijke as Ω, gaande door het punt $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$, gegeven door

$$\xi_1 = \begin{vmatrix} q & r \\ v^0_\eta & v^0_\zeta \end{vmatrix} : \omega^2$$

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} r & p \\ v^0_\zeta & v^0_\xi \end{vmatrix} : \omega^2$$

$$\zeta_1 = \begin{vmatrix} p & q \\ v^0_\xi & v^0_\eta \end{vmatrix} : \omega^2$$

De beweging is dus ook aequivalent met eene wenteling om deze lijn met de hoeksnelheid ω en eene verschuiving volgens deze lijn met de snelheid T; m. a. w. aequivalent met eene schroefbeweging. Deze lijn vormt de as der schroef waarvan de spoed is T. Daarom zullen we die as de schroefas van de beweging noemen.

22. De lengte r_0 van de lijn, die den beweeglijken oorsprong met het punt $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$, verbindt is

$$r_0 = \frac{1}{\omega^2} \sqrt{\left| \begin{matrix} p & q & r \\ v^0_\xi & v^0_\eta & v^0_\zeta \end{matrix} \right|^2} = \frac{\omega\, v^0 \sin(\Omega\; v^0)}{\omega^2} = \frac{u}{\omega}$$

als u de ontbondene $\sqrt{v^{02} - T^2}$ van de verschuivingssnelheid loodrecht op Ω voorstelt. Dus $u = r_0\,\omega$. Verder staat r^0 zoowel loodrecht op Ω als op v^0, en meet ze dus den kortsten afstand tusschen de schroefas en v^0, bijgevolg geeft de wenteling ω om de schroefas aan den beweeglijken oorsprong de snelheid u.

Hieruit blijkt dus, dat de wenteling ω om de schroefas aequivalent is met de wenteling ω om de as $\Omega \left(\frac{\zeta}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\xi}{r}\right)$ + eene verschuiving u loodrecht op het vlak van beide assen, waaruit dan verder volgt, dat de verschuiving u aequivalent is met een koppel van aswenteling, gelegen in een vlak loodrecht op u, terwijl de afstand dier assen $\times$ hoeksnelheid $= r_0\,\omega = u$ is. Dit produkt heet het moment van het koppel.

Versnellingen.

23. Worden de vergel. (10) naar den tijd t gedifferentieerd, dan komt er:

$$\begin{aligned}
\xi'' &= \xi''_0 + \left| \begin{matrix} q' & r' \\ \eta & \zeta \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} q & r \\ \eta' & \zeta' \end{matrix} \right| \\
\eta'' &= \eta''_0 + \left| \begin{matrix} r' & p' \\ \zeta & \xi \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} r & p \\ \zeta' & \xi' \end{matrix} \right| \\
\zeta'' &= \zeta''_0 + \left| \begin{matrix} p' & q' \\ \xi & \eta \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} p & q \\ \xi' & \eta' \end{matrix} \right| .
\end{aligned}$$

Zij verschillen alleen van de vergelijkingen (7) door de termen ξ''_0, η''_0, ζ''_0 in het tweede lid, de versnellingen nl. volgens de beweeglijke assen van den oorsprong, en wier resultante gelijk is aan die van de ontbondenen in (1) genoemd, als daarin $n = 1$ genomen wordt.

De versnelling is dus de resultante van drie componenten nl. de twee in § 15 genoemd, $\omega^2\, l$ loodrecht gericht op de oogenblikkelijke as, $\omega_1\, l_1$ loodrecht op het vlak bepaald door de hoekversnellingsas Ω_1 en het punt, en eindelijk de versnelling van den oorsprong, de snelheid van het vrije uiteinde van den vector v^0. Deze laatste kan ontbonden worden in de tangentiale versnelling $\frac{dv^0}{dt}$ en

in de normale versnelling $\omega v^0 \sin(\Omega v^0) = \omega u$, als u de ontbondene van v^0 loodrecht op de oogenblikkelijke as is, welke ontbondene gewoonlijk de orthogonale snelheid van den oorsprong heet.

Het is duidelijk, dat de versnelling van elke orde de resultante is van de componenten (9), die men vindt, als de oorsprong van het beweeglijk assenstelsel *vast* is, vermeerderd met de versnelling van dezelfde orde van den oorsprong, en die gegeven wordt door de drie componenten in (1) genoemd.

24. Een bijzonder geval van deze beweging is dat, waarbij alle punten van het lichaam zich bewegen evenwijdig aan een zelfde vlak.

In dat geval beschrijft ieder punt eene vlakke baan, zoodat geene versnelling van eenige orde eene ontbondene loodrecht op dat vlak heeft Bij deze beweging moeten dus alle hoekversnellingsassen samen vallen met de loodlijn uit den beweeglijken oorsprong op dat vlak neergelaten, waaruit verder volgt, dat $\omega_n = \omega'_{n-1} = \omega''_{n-2} = \\ = \omega^{(n)}$ is.

Oogenblikkelijke assen en oogenblikkelijke middelpunten van hoogere orden.

25. Uit de formules (9) voor de ontbondenen van de versnelling van de n^e orde van een punt eens lichaams, dat om een vast punt beweegt, volgt:

1^0 dat die ontbondenen liniaire functies van de coördinaten ξ, η, ζ, van het punt zijn;

2^0 dat de coefficienten van ξ, η, ζ alleen afhangen van p, q, r, p', q', $r' \ldots p^{(n)}$, $q^{(n)}$, $r^{(n)}$, zoodat ook de determinant van het liniaire stelsel alleen van deze grootheden zal afhangen.

Zoo is b. v. de determinant D_1, welke behoort bij de versnelling van de 1^e orde:

$$D_1 = \begin{vmatrix} p^2 - \omega^2, & pq - r', & pr + q' \\ pq + r', & q^2 - \omega^2, & qr - p' \\ pr - q', & qr + p', & r^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = \omega^2 (\omega'^2 - \omega_1^2), \quad . \ . \ (12)$$

terwijl de determinant D_2 van de 2^e orde is

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3pp' - 3\omega\omega' & , \ 2pq' + p'q + (\omega^2 r - r''), & 2pr' + p'r - (\omega^2 q - q'') \\ 2p'q + pq' - (\omega^2 r - r''), & 3qq' - 3\omega\omega' & , \ 2qr' + q'r + (\omega^2 p - p'') \\ 2p'r + pr' + (\omega^2 q - q'), & 2q'r + qr' - (\omega^2 p - p''). & 3rr' - 3\omega\omega' \end{vmatrix}$$

Wordt deze ontwikkeld in gedeeltelijke determinanten, waarin de termen $3\omega\omega'$, $\omega^2 p - p''$, $\omega^2 q - q''$, $\omega^2 r - r''$ behouden blijven, dan

vindt men, dat de som der termen, die onafhankelijk zijn van genoemde uitdrukkingen, identiek gelijk nul is. De overige geven samen:

$$D_2 = 3\omega\,[\omega'\{I - 2\,\omega^2(\omega'^2 - \omega_1{}^2)\} - \omega^3\{\omega_1\,\omega'_1 - \omega'\,\omega_2\cos(\Omega\,\Omega_2)\} -$$

$$- \omega_2\{\omega'\,\omega_2 - \omega_1\,\omega'_1\cos(\Omega\,\Omega_2)\}\,] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

waar

$$I = \begin{vmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{vmatrix}$$

den inhoud voorstelt van het parallelepipedum op ω, ω_1, ω_2 als ribben beschreven.

Vallen Ω en Ω_1 samen, zoodat $\omega_1 = \omega'$ en $\omega_2 \cos(\Omega\,\Omega_2) = \omega''$ is, dan gaat deze determinant D_2 over in

$$D_2 = -\,3\,\omega\,\omega_1\,\omega_2{}^2\sin^2(\Omega\,\Omega_2). \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

en wordt dus gelijk nul, wanneer ook Ω_2 met Ω en Ω_1 samenvalt. D_2 wordt dus nul voor $\omega = 0$ en ook voor $\omega_2 = \omega'_1 = \omega''$, als dus de drie hoekversnellingsassen van de 0^e^, 1^e^ en 2^e^ orde samenvallen. D_1 wordt nul voor $\omega = 0$ en ook voor $\omega_1 = \omega'$, als dus de assen Ω en Ω_1 samenvallen.

26. Is de determinant D_n ongelijk aan nul, dan kan men in het lichaam altijd één, maar ook slechts één punt aanwijzen, welks versnellingsvector van de n^e orde eene vooraf bepaalde grootte en richting heeft, en dan is het vaste punt het eenige punt, dat geene versnelling van de n^e orde heeft.

Is de determinant D_n gelijk nul, dan heeft ieder punt van 't lichaam nog de versnelling van de n^e orde, aangewezen door de vergelijkingen (9), maar nu bestaat er eene betrekking tusschen de ontbondenen van die versnelling, zoodat het nu niet altijd mogelijk zal zijn een punt van 't lichaam aan te wijzen, welks versnellingsvector van de n^e orde eene vooraf bepaalde richting en grootte heeft.

Daarentegen bestaat er nu eene rechte lijn in het lichaam, die door het vaste punt gaat, wier punten geene versnelling van de n^e orde hebben, en die alzoo *de oogenblikkelijke as van de n^e orde* kan genoemd worden. Hare vergelijking wordt gegeven door twee van de drie vergelijkingen (9), als daarin de eerste leden gelijk nul gesteld worden.

27. Nu is de determinant D_n niet identiek gelijk nul, omdat gemakkelijk kan aangetoond worden, dat er altijd een geval denk-

baar is, waarbij het vaste punt het eenige is, dat eene versnelling van de n^e orde gelijk nul heeft.

Onderstellen we nl. dat alle hoekversnellingsassen behalve de laatste of $\boldsymbol{\Omega}_n$ samenvallen met de oogenblikkelijke as, dan liggen de n componenten $\binom{n}{m}\omega_{n-m}\overset{m-1}{\alpha}\sin\left(\boldsymbol{\Omega}_{n-m}\overset{m-1}{\alpha}\right)$ allen in het vlak dat loodrecht op de gemeenschappelijke as staat en door het punt gaat. De $(n+1)^e$ component $\omega_n\, l_n$ ligt buiten dat vlak. Werd het punt op de gemeenschappelijke as gekozen, dan is de versnelling gelijk $\omega_n\, l_n$; en werd het punt gekozen op $\boldsymbol{\Omega}_n$ zelf, dan zou de versnelling alleen nul kunnen wezen, als dit 't geval was met de resultante van de eerstgenoemde n componenten; en daar deze zeker niet voor alle punten in het normale vlak nul kan wezen, behoeft men $\boldsymbol{\Omega}_n$ slechts getrokken te denken door een punt van dat vlak, voor hetwelk die resultante niet nul is. De uitdrukking (14) voor D_2 bevestigt de stelling.

In 't algemeen dus zal D_n niet nul wezen, maar alle mogelijke waarden kunnen hebben, aangezien de grootheden $\omega, \omega_1, \omega_2 \ldots . \omega_n$ waarvan ze afhangt, geheel willekeurig zijn.

28. Is $D_n = 0$, dan moet er dus eene betrekking tusschen de hoekversnellingen bestaan.

Twee betrekkingen kunnen wij uit (9) afleiden, voor welke $D_n = 0$ moet wezen.

Eerstens als $\omega_n = \omega'_{n-1} = \omega''_{n-2} = \ldots . = \omega^{(n)}$ is, m. a. w. als alle hoekversnellingsassen van de 0^0 tot de n^e orde samenvallen. Want dan zijn $p^{(l)}$, $q^{(l)}$, $r^{(l)}$ evenredig met p, q, r; en worden in (9) ξ evenredig met p, η met q, ζ met r gesteld, zoodat het punt op de oogenblikkelijke as $\boldsymbol{\Omega}$ wordt aangenomen, dan worden alle determinanten in de tweede leden gelijk nul, en met dezen ook de versnelling $\overset{n}{\alpha}$. De oogenblikkelijke as van de 0^e orde is dan tevens die van elke andere orde.

De tweede betrekking blijkt uit (10), als deze op de volgende wijze geschreven wordt:

$$\overset{n}{\alpha} = \text{Result.} \left\{ \begin{array}{l} \omega_n\, l_n, \begin{array}{l} \binom{n}{1}\omega_{n-1}\overset{0}{\alpha}\sin\left(\boldsymbol{\Omega}_{n-1}\overset{0}{\alpha}\right), \ldots . , \\ \binom{n}{1}\omega\overset{n-1}{\alpha}\sin\left(\boldsymbol{\Omega}\overset{n-1}{\alpha}\right), \ldots . , \end{array} \\ \begin{array}{l} \ldots . \binom{n}{\frac{n-1}{2}}\omega_{\frac{n+1}{2}}\overset{\frac{n-3}{2}}{\alpha}\sin\left(\boldsymbol{\Omega}_{\frac{n+1}{2}}\overset{\frac{n-3}{2}}{\alpha}\right), \\ \ldots . \binom{n}{\frac{n-1}{2}}\omega_{\frac{n-3}{2}}\overset{\frac{n+1}{2}}{\alpha}\sin\left(\boldsymbol{\Omega}_{\frac{n-3}{2}}\overset{\frac{n+1}{2}}{\alpha}\right), \end{array} \binom{n}{\frac{n+1}{2}}\omega_{\frac{n-1}{2}}\overset{\frac{n-1}{2}}{\alpha}\sin\left(\boldsymbol{\Omega}_{\frac{n-1}{2}}\overset{\frac{n-1}{2}}{\alpha}\right), \end{array} \right\}$$

als n *oneven* is,

$$\overset{n}{\alpha} = \text{Result.}\left\{ \omega_n\, l_n,\ \begin{matrix} \binom{n}{1}\, \omega_{n-1}\, \overset{0}{\alpha}\, \sin\left(\Omega_{n-1}\, \overset{0}{\alpha}\right), \ldots\ldots, \\ \binom{n}{1}\, \omega\, \overset{n-1}{\alpha}\, \sin\left(\Omega\, \overset{n-1}{\alpha}\right), \ldots\ldots, \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \ldots\ldots\ \binom{n}{\frac{n}{2}}\, \omega_{\frac{n}{2}}\, \overset{\frac{n-2}{2}}{\alpha}\, \sin\left(\Omega_{\frac{n}{2}}\, \overset{\frac{n-2}{2}}{\alpha}\right) \\ \ldots\ldots\ \binom{n}{\frac{n}{2}}\, \omega_{\frac{n-2}{2}}\, \overset{\frac{n}{2}}{\alpha}\, \sin\left(\Omega_{\frac{n-2}{2}}\, \overset{\frac{n}{2}}{\alpha}\right) \end{matrix} \right\}$$

als n *even* is.

Omdat nu met $\omega = \omega_1 = \ldots\ldots = \omega_l = 0$ gepaard gaat $\alpha^0 = \alpha^1 = \alpha^2 = \ldots\ldots = \alpha^l = 0$, zoo zien we, dat de versnelling $\overset{n}{\alpha}$ van de n^e orde zich reduceert tot $\omega_n\, l_n$ en dat bijgevolg de as Ω_n de oogenblikkelijke as van de n_e orde is, zoodra $\omega = \omega_1 = \ldots\ldots = \omega_{\frac{n-1}{2}} = 0$ is voor n *oneven*, of $\omega = \omega_1 = \ldots\ldots = \omega_{\frac{n-2}{2}} = 0$ voor n *even*. Tevens blijkt, dat elke hoekversnellingsas van lagere orde de oogenblikkelijke as van dezelfde orde is. In 't algemeen geldt de stelling:

Is $\omega = \omega_1 = \omega_2 = \ldots\ldots = \omega_l = 0$, *dan is* Ω_{l+1} *de oogenblikkelijke as van de* $(l+1)^e$ *orde,* Ω_{l+2} *die van de* $(l+2)^e$ *orde,* ...... , Ω_{2l+2} *die van de* $(2\,l+2)^e$ *orde.*

De uitdrukking (12) voor D_1 geeft aan, dat deze alleen in beide gevallen nul wordt, terwijl ook D_2 nul wordt van $\omega = 0$ volgens (13) en voor $\omega_2 = \omega'_1 = \omega''$ volgens (14).

29. Bij de wenteling van een lichaam om een vast punt is er dus in 't algemeen altijd één, maar ook slechts één punt aan te wijzen, welks versnellingsvector van de n^e orde eene vooraf bepaalde grootte en richting heeft, zoodat het *vaste* punt, waarom het lichaam beweegt, het eenige is, waarvan de versnellingen van alle orden nul zijn.

30. Heeft een lichaam eene geheel willekeurige beweging, dan bestaat er in het algemeen slechts één punt, welks versnellingsvector van de n^e orde nul is, dat dus een *oogenblikkelijk versnellingsmiddelpunt van de n^e orde is.* Omdat er toch slechts één punt is, welks versnellingsvector, in de onderstelling nl. dat de oorsprong *vast* gedacht wordt, gelijk maar tegengesteld gericht is aan den versnellingsvector van dien oorsprong, zoo zal dat in werkelijkheid eene versnelling van de n^e orde hebben, die nul is. Omdat in 't algemeen D_n niet gelijk nul is, bestaat er dus in 't algemeen een *oogenblikkelijk versnellingsmiddelpunt van de n^e orde.*

31 Noemen we de coördinaten van dat oogenblikkelijke versnellingsmiddelpunt ξ_1, η_1, ζ_1, en is $\overset{n}{\alpha}_0$ de versnelling van de n^e orde van den oorsprong van het beweeglijk assenstelsel, dan is volgens (9)

$$\overset{n}{\alpha}_\xi - \overset{n}{\alpha}_{0\xi} = \sum_{m=o}^{m=n} \binom{n}{m} \begin{vmatrix} q^{(n-m)} & r^{(n-m)} \\ \eta^{(m)} & \zeta^{(m)} \end{vmatrix},$$

en volgens onderstelling

$$-\overset{n}{\alpha}_{0\xi} = \sum_{m=o}^{m=n} \binom{n}{m} \begin{vmatrix} q^{(n-m)} & r^{(n-m)} \\ \eta_1^{(m)} & \zeta_1^{(m)} \end{vmatrix},$$

zoodat door aftrekking hieruit volgt:

Evenzoo is
$$\left.\begin{aligned}
\overset{n}{\alpha}_\xi &= \sum_{m=o}^{m=n} \binom{n}{m} \begin{vmatrix} q^{(n-m)} & r^{(n-m)} \\ (\eta-\eta_1)^{(m)} & (\zeta-\zeta_1)^{(m)} \end{vmatrix} \\
\overset{n}{\alpha}_\eta &= \sum_{m=o}^{m=n} \binom{n}{m} \begin{vmatrix} r^{(n-m)} & p^{(n-m)} \\ (\zeta-\zeta_1)^{(m)} & (\xi-\xi_1)^{(m)} \end{vmatrix} \\
\overset{n}{\alpha}_\zeta &= \sum_{m=o}^{m=n} \binom{n}{m} \begin{vmatrix} p^{(n-m)} & q^{(n-m)} \\ (\xi-\xi_1)^{(m)} & (\eta-\eta_1)^{(m)} \end{vmatrix}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Deze formules gaan over in (9), als $\xi-\xi_1$, $\eta-\eta_1$, $\zeta-\zeta_1$ veranderd worden in ξ, η, ζ, m. a. w. als het oogenblikkelijk versnellingsmiddelpunt tot oorsprong van het beweeglijk assenstelsel wordt gekozen.

De versnelling van de n^e orde van een punt eens lichaams, dat de meest algemeene beweging heeft, is gelijk aan die, welke het hebben zou, als het oogenblikkelijke versnellingsmiddelpunt van de n^e orde tot vasten oorsprong van het beweeglijke assenstelsel wordt gekozen. De versnellingen van de 0^e tot aan de $(n-1)^e$ orde, welke dit punt heeft, wijzigen de versnelling van de n^e orde in geenen deele.

32. Is D_n echter gelijk nul, (zooals bij D_0, die identiek gelijk nul is, bij D_1 voor $\omega = 0$ en voor $\omega_1 = \omega'$; bij D_2 voor $\omega = 0$ en $\omega_2 = \omega_1' = \omega''$) dan bestaat er eene liniaire betrekking tusschen $\overset{n}{\alpha}_\xi - \overset{n}{\alpha}_{0\xi}$, $\overset{n}{\alpha}_\eta - \overset{n}{\alpha}_{0\eta}$, $\overset{n}{\alpha}_\zeta - \overset{n}{\alpha}_{0\zeta}$, die *identiek* gelijk nul is. De coefficienten van die grootheden (nl. de onderdeterminanten van de 1^e orde van D_n, welke uit twee *kolommen* kunnen gevormd worden) zijn functies van $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots\ldots \omega_n$. Noemen we ze kortheidshalve A, B, C, dan is dus

$$A\overset{n}{\alpha}_\xi + B\overset{n}{\alpha}_\eta + C\overset{n}{\alpha}_\zeta = \text{standvastig.}$$

In geval dus $D_n = 0$ is, bestaat er eene richting volgens welke de ontbondene van $\overset{n}{\alpha}$ voor *alle* punten dezelfde grootte heeft.

De richtingscoefficienten van die lijn zijn evenredig met het drietal onderdeterminanten, die gevormd kunnen worden uit twee *kolommen* van D_n, terwijl de richtingscoefficienten van de oogenblikkelijke hoekversnellingsas evenredig zijn met de drie onderdeterminanten, welke uit twee *rijen* van D_n kunnen gevormd worden. Zonder nader onderzoek mag dus niet aangenomen worden, dat beide richtingen samenvallen, en dus de mogelijkheid bestaat, dat er bij alle versnellingen van hoogere orde eene as is, wier punten alle dezelfde versnelling alleen *in* de richting dier as hebben, evenals dit het geval is bij de versnellingen van de 0e orde.

33. Evenwel kan aangetoond worden, dat wanneer Ω_n de oogenblikkelijke hoekversnellingsas van de ne orde is, er eene schroefas van de ne orde bestaat.

In dit geval toch zijn de vergelijkingen voor de ontbondenen van de versnelling van de ne orde:

$$\overset{n}{\alpha}_\xi - \overset{n}{\alpha}_{0\xi} = \begin{vmatrix} q^{(n)} & r^{(n)} \\ \eta & \zeta \end{vmatrix}$$

$$\overset{n}{\alpha}_\eta - \overset{n}{\alpha}_{0\eta} = \begin{vmatrix} r^{(n)} & p^{(n)} \\ \zeta & \xi \end{vmatrix}$$

$$\overset{n}{\alpha}_\zeta - \overset{n}{\alpha}_{0\zeta} = \begin{vmatrix} p^{(n)} & q^{(n)} \\ \xi & \eta \end{vmatrix}$$

Worden deze vergeleken met (11) in § 20, dan ziet men, dat daar p, q, r, v veranderd moeten worden resp. in $p^{(n)}$, $q^{(n)}$, $r^{(n)}$, $\alpha^{(n)}$ om in deze over te gaan. Met deze verwisseling kunnen we het daar gevonden resultaat overnemen.

Het blijkt dus, dat ingeval Ω_n is de oogenblikkelijke hoekversnellingsas, 1°. er eene *schroefas* van de ne orde bestaat, 2°. dat eene *verschuiving* met de versnelling $\overset{n}{\alpha}$ aequivalent is met een *koppel van hoekversnellingen* van de ne orde, welks vlak loodrecht op $\overset{n}{\alpha}$ gericht is en welks moment gelijk $\overset{n}{\alpha}$ is.

34. Geschiedt de beweging van het lichaam evenwijdig aan een plat vlak, dan moeten alle hoekversnellingsassen samenvallen met

de loodlijn, uit den beweeglijken oorsprong op dat vlak neergelaten en bestaat er bij deze beweging altijd eene oogenblikkelijke as voor elke orde.

De doorsnede van die as met het vlak zal dan het oogenblikkelijk middelpunt kunnen genoemd worden van de beweging der doorsnede van het lichaam met het vlak.

ERRATA.

bl.	12,	regel	4,	$b_{,,}\ c_{,,}$	lees	$b_{,,}\ c'_{,,}$
»	13,	»	14,	ζ	»	ξ
»	14,	»	18,	η	»	$-\eta$
»	15,	»	3,	$\begin{vmatrix} r & p \\ \zeta & \xi \end{vmatrix}$	»	$\begin{vmatrix} r & p \\ \zeta'' & \xi'' \end{vmatrix}$
»	15,	regels	12, 13, 14,	Ω	»	Ω_1.
»	19,	regel	17,	(10)	»	(11).

BOEKDRUKKERIJ
De Roever Kröber-Bakels.
AMSTERDAM.

ON THE ASTIGMATISM

OF

ROWLAND'S CONCAVE GRATINGS.

BY DR. J. L. SIRKS, *Groningen.*

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

DEEL II. No. 6.

(With one Plate.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1894.

ON THE ASTIGMATISM

OF

ROWLAND'S CONCAVE GRATINGS.

By Dr. J. L. SIRKS, *Groningen.*

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

DEEL II. No. 6.

(With one Plate.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1894.

ON THE ASTIGMATISM OF ROWLAND'S CONCAVE GRATINGS.

BY DR. J. L. SIRKS, *Groningen*.

In a well-known paper of Mr. J. S. AMES, On Concave Gratings for Optical Purposes [1]), the following passage occurs. „Owing to „the astigmatism of the grating, it is not possible to adopt the usual „method of illuminating part of the slit with the solar image and „part with the spark or arc; and so a different and far better plan „is adopted. A compound photograph of the two spectra is taken „in the following manner."

Yet this new plan, devised and executed by Professor ROWLAND with his wonted success, is only applicable by means of photography, as the photographs of the different spectra must be taken one after another; and if the precited statement, — which, so far as I see, neither Mr. AMES nor Prof. ROWLAND, at whose request he wrote, has recalled or modified — were to be accepted in its apparent purport, the beautiful instrument with which Mr. ROWLAND has endowed the spectroscopist would be unfit for the direct comparison of spectra from different sources by ocular observation, that was always regarded as a precious function of the dioptric spectroscope.

Fortunately however, though in the literal acceptation of the words it is useless to illuminate *part* of the slit with one source of light and *part* with another, it is certainly possible to institute the intended comparison, at least with the first and second spectra, by a slight modification of the common method: the prisms or other equivalent contrivances that are generally used to introduce lateral beams of light, need only be placed *not against the slit*, in A (Fig. 1), *but at a distance* $\varrho \sec \nu - \varrho \cos \nu$ *from the slit*, $\varrho \sec \nu$ from the grating, viz. at a point Q, being the intersection of BA and the tangent in the focus C.

---

[1]) Phil. Mag. XXVII, p. 381, 1889; cf. Astr. and Astro-Ph. 1892, p. 39.

In order to demonstrate the truth of this assertion let us consider the pencil of monochromatic rays that will, after the reflection at the grating, concur in the focus at C. It may be divided into what I may be allowed to call vertical „fans" of rays, each of them being limited by two vertical planes passing through the slit and including an infinitesimally narrow strip of the grating. Now all the rays contained in such a „fan", in order to concur at C without any difference of path, must issue from an apex situated in the line CQ, being the axis of the spherical surface, part of whose equatorial region is occupied by the grating.

On the other hand the horizontal fans of rays into which the pencil may be divided, by theory of diffraction have their apices in the slit. So *all* the rays that concur at C must have passed successively through two caustics: the one realised by the slit, the other only virtual, lying along the line GH, where it may be realised by another slit, if the source of light be placed at a sufficient distance. It will be easily seen that the length of the first caustic, the available part of the slit, is $b \times QA / QB = b \sin^2 \nu$, that of the second $GH = a \times QA / BA = a \operatorname{tg}^2 \nu$, a and b being the horizontal and vertical dimensions of the grating.

The existence of the second caustic, that is of great importance for the complete theory of the instrument, may be very simply demonstrated ad oculos by stretching a thin wire in Q along GH across an incident beam of sunlight: the result is a *perfectly defined* narrow black band passing horizontally across the field of the eyepiece. Any other horizontal strip of the field has its own conjugate horizontal strip, of a somewhat greater width, in the proportion $\varrho \sec \nu / \varrho$, a little above or below Q in a vertical plane passing through GH. Yet every single *point* in the strip of the field, belonging to one single λ, derives from the conjugate horizontal caustic // GH in its full *length;* conversely every *point* of a horizontal slit above or below GH has its horizontal *linear* image in the field depicted by rays of different λ's.

If the horizontal band, seen in the field, is required to have a width h, the horizontal slit in GH must be replaced by a rectangular diaphragm height $h \times QB / BC = h \sec \nu$, length as before $GH = a \operatorname{tg}^2 \nu$. At the same time the vertical slit ought to be lengthened by the quantity $h \cos \nu$, until it gives passage to all the rays issuing from the diaphragm that can reach the grating; so the full length becomes $h \cos \nu + b \sin^2 \nu$. All the rays that are obstructed by the diaphragm, if admitted would only tend to increase the disadvantageous illumination of the field by scattered light.

Any incident ray passing through the diaphragm *over* (under) the line CQ and through the slit will come at a focus in the *lower* (upper) half of the field. A short but rather broad prism, 2 or 3 mm. in height, placed at Q and reflecting lateral solar light, will give a narrow solar spectrum with perfectly defined edges, passing through the centre of the field; at the same time it will obstruct *none* of such rays, emanating from a sodium-flame or arc-light placed somewhere about T, as may concur in forming a sodium- or metal-spectrum in the remaining part of the field. Of course if we wish to get the metal-spectrum as bright as possible, the cone of light furnished by the condensing lens S must be wide enough to fill up the wedge formed by the rectangular diaphragm and the slit.

With the third and ulterior spectra and with a very large grating the condensing lens should be of rather great dimensions, so I think the method will only be quite applicable with the first and second spectra. I may add that probably the very best plan would be to have a bicylindrical lens, or two cylindrical lenses put crosswise, of such a curvature that both its orthogonal caustics might coincide with the above named caustics of the grating; but every different angle v or at least every successive spectrum would require its especial lens.

Through the kind permission and efficacious assistance of Professor Haga I have been able to control the above by a provisional experiment. A narrow central band of the field on a black ground showed the first sodium-spectrum originating from a strip of mirror-glass, height 2,5 mm., placed along the caustic at Q, at 171 mm. from the slit, and upon which the light of a lateral Bunsen-flame was concentrated through a lens, $f = 150$ mm. The strip of glass just arrested the superfluous central part of a direct beam of sunlight that filled out the upper and lower parts of the field with its spectrum. The sunlight had to be passed through several layers of wire-gauze in order to bring down its intensity to that of the reflected sodium-light. Now in the compound spectrum the two positive sodium-lines ended abruptly where the negative sodium-lines began; yet two very narrow sharp black lines, about 0,1 mm. wide, separated the three contiguous spectral bands: this was occasioned by the strip of glass having been simply cut with a diamond without any ulterior grinding or polishing; so the somewhat rugged edges, while they were unable to take part in the reflection of the sodium-flame only acted as a barrier against the sunlight grazing them.

In order to try to what limit, if need be, the method can be applied, we turned the moveable girder of the spectroscope on to

the last or fourth spectrum with $\boldsymbol{v} = 68°$, $\sin \boldsymbol{v} = 0.928$. A knitting-needle held in the horizontal caustic, that now lay at 714 cm. from the slit, was accurately represented by a narrow black line across the solar spectrum. This proves that the definition in the images of horizontal lines, produced by the vertical fans holds good even at this great angle of incidence.

I still may remark that the whole action of the hollow grating with a radius ϱ, may *for these fans* be regarded as the result of three successive operations: one being that of a first concave mirror, with a radius 2ϱ, but reduced by astigmatism to a radius $2\varrho \sec \boldsymbol{v}$, that brings the incident rays to parallelism; the second that of a plane grating, which occasions the diffraction at an angle $\boldsymbol{v}$; the third that of an other concave mirror 2ϱ, which makes the diffracted parallel rays converge into a focus. The distances and dimensions of two conjugate images may be simply calculated by the formulae for one mirror with $f = \varrho/(1 + \cos \boldsymbol{v})$, as may be proved in the following manner.

Let B K (Fig. 2) be part of a very narrow vertical strip, and B the centre of the mirror, C the centre of curvature; D and E two conjugate foci determined by their height $z_1 = \mathrm{DM}$, $z_2 = \mathrm{EL}$ over the horizontal plane LBM, by $\mathrm{BM} = \mathrm{R}$, $\mathrm{BL} = r$ and $\angle \mathrm{MBL} = \boldsymbol{v}$; ϱ being the radius BC of the sphere, $\mathrm{KI} = l$.

Now with a sufficient degree of approximation we successively find

$$\mathrm{BI} = \frac{l^2}{2\varrho}, \quad \mathrm{IM} = \mathrm{R} - \frac{l^2 \cos \boldsymbol{v}}{2\varrho},$$

$$\mathrm{KD}^2 = \mathrm{IM}^2 + (l - z_1)^2 = \mathrm{R}^2 - \frac{\mathrm{R}\, l^2 \cos \boldsymbol{v}}{\varrho} + (l - z_1)^2$$

$$\mathrm{KD} = \mathrm{R} - \frac{l^2 \cos \boldsymbol{v}}{2\varrho} + \frac{l^2 - 2\, l\, z_1 + z_1^2}{2\,\mathrm{R}};$$

consequently

$$\mathrm{KE} = r - \frac{l^2}{2\varrho} + \frac{l^2 - 2\, l\, z_2 + z_2^2}{2\, r}.$$

For the point B, $l = 0$, we have

$$-\mathrm{BD} = -\mathrm{R} \qquad - \frac{z_1^2}{2\,\mathrm{R}},$$

$$-\mathrm{BE} = -r \qquad - \frac{z_2^2}{2\, r}.$$

Hence by addition we find for the difference Δ of the two paths DKE — DBE

$$\Delta = l^2 \left(- \frac{1 + \cos v}{2\varrho} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2r} \right) - l \left(\frac{z_1}{R} + \frac{z_2}{r} \right).$$

Now if indeed D and E be conjugate foci, Δ must vanish for every value of l, and both the factors included in brackets must be $= 0$. So the first factor gives for the relation of the distances

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{1 + \cos v}{\varrho}$$

as with a mirror of $\varrho/(1 + \cos v)$ focus; the second makes

$$\frac{z_1}{z_2} = - \frac{R}{r}$$

so that the heights of the images are proportional to the distances as in common optics.

I think I have shown that the astigmatism of the grating, while securing to the instrument some precious qualities, is no impediment against a method of observation that seems to be reputed incompatible with astigmatism. On the other hand the valued quality of the concave grating, that it shows no dust-lines, and that the image of a star or a spark on the slit is broadened out into a band, may be imparted to a dioptric spectroscope by giving a slight convex spherical curvature to one side of one of the prisms, so that the instrument becomes slightly astigmatic.

Dec. the 28th 1893.

Fig. 1.

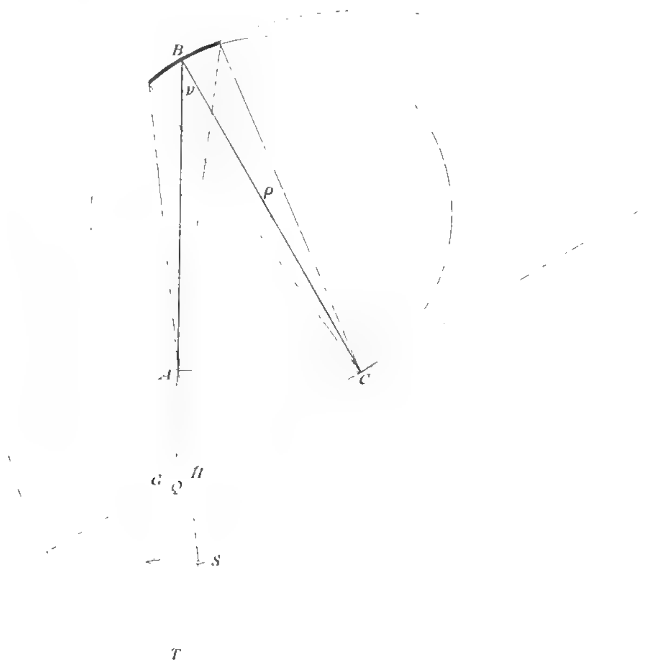
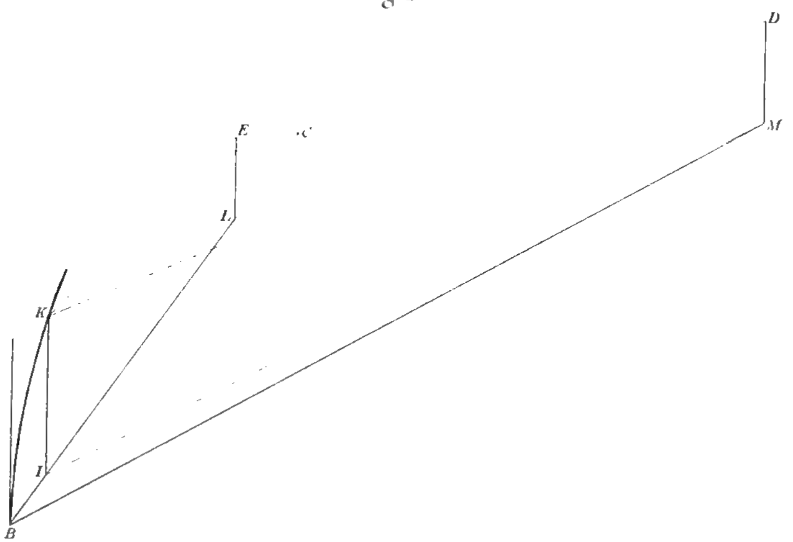


Fig. 2



J. Bijvel lith Leiden

BOEKDRUKKERIJ
De Roever Kröber-Bakels.
AMSTERDAM.

REGELMÄSSIGE

SCHNITTE UND PROJECTIONEN

DES HUNDERTZWANZIGZELLES UND SECHSHUNDERTZELLES

IM

VIERDIMENSIONALEN RAUME

VON

P. H. SCHOUTE.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

(DEEL II. N°. 7.)

(Mit sieben Tafeln und drei Tabellen).

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1894.

REGELMÄSSIGE

SCHNITTE UND PROJECTIONEN

DES HUNDERTZWANZIGZELLES UND SECHSHUNDERTZELLES

IM

VIERDIMENSIONALEN RAUME

VON

P. H. SCHOUTE.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

(DEEL II. N°. 7.)

(Mit sieben Tafeln und drei Tabellen).

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1894.

REGELMÄSSIGE

SCHNITTE UND PROJECTIONEN

DES HUNDERTZWANZIGZELLES UND SECHSHUNDERTZELLES

IM VIERDIMENSIONALEN RAUME

VON

P. H. SCHOUTE.

I. Coordinatenstellung des Z_a^{600}.

1. Schon vor zehn Jahren hat Dr. A. Puchta die Coordinaten der 120 Eckpunkte des Z^{600} berechnet (*Wiener Sitzungsberichte*, Bd. 89, S. 817). Deshalb würde ich das zu der Bestimmung der Schnitte und Projectionen dieses Zelles notwendige Material aus seiner Arbeit haben schöpfen können. Ich ziehe es aber vor ein von der Puchta'schen Methode ganz verschiedenes Verfahren zu veröffentlichen, das sich in der Anwendung viel übersichtlicher gestaltet, indem es der mühseligen Auswertung der Coordinaten der individuellen Punkte umgehend das ganze System dieser Coordinatenwerte fast wie in einem Schlage zu liefern im Stande ist. Es möge dieses Verfahren von der entsprechenden Betrachtung im dreidimensionalen Raume eingeleitet werden.

Bekanntlich bilden die in einen Eckpunkt P (Fig. 1) eines regelmässigen Ikosaeders zusammentreffenden Flächen die fünf Seitenflächen einer regelmässigen Pyramide. Ist die Seitenlänge des Ikosaeders a, so ist der Radius r des dem Pentagon ABCDE der Grundebene umgeschriebenen Kreises $\frac{2a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ und findet man für die Höhe PM der Pyramide und das Diameter PQ der dem Ikosaeder umgeschriebenen Kugel nach einander die Werte $\sqrt{a^2-r^2} = \frac{2a}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ und $\frac{a^2}{\mathrm{PM}} = \frac{1}{2}\, a\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

G 1*

Wir erinnern hier an diese bekannten Sätze, weil sie uns das Mittel darbieten von einer Coordinatenstellung der Eckpunkte des regelmässigen Pentagons (Coordinatenanfang in M) zu einer Coordinatenstellung des Ikosaeders im Raume (Coordinatenanfang in der Mitte O von PQ) zu gelangen und ein ganz analoges Verfahren von der Coordinatenstellung des Ikosaeders zu jener des Sechshundertzelles Z_a^{600} führen kann.

2. Das Z_a^{600} wird von 600 Tetraedern eingeschlossen. In jeden Eckpunkt P′ dieses Gebildes treten 20 dieser Tetraeder zusammen und die dem Punkte P′ gegenüberliegenden Flächen dieser Tetraeder schliessen wieder ein regelmässiges Ikosaeder ein. Es beträgt die Entfernung P′M′ zwischen P′ und dem Centrum M′ des Ikosaeders $\sqrt{a^2 - \frac{1}{16}a^2(10 + 2\sqrt{5})}$ oder $\frac{1}{4}a(\sqrt{5} - 1)$ und das Diameter P′Q′ der dem Z_a^{600} umgeschriebenen Hypersphere oder $\frac{a^2}{P'M'}$ hat die Länge $a(\sqrt{5} + 1)$.

3. Die Verwirklichung des angedeuteten Gedankens wird am leichtesten gelingen, wenn die ursprüngliche Coordinatenstellung des Ikosaeders möglichst symmetrisch gewählt wird. Deshalb beziehen wir das Ikosaeder (Fig. 2) auf eins der fünf von den Querlinien gebildeten rechtwinkligen Coordinatensysteme. Da der Radius der die Kanten des Ikosaeders in ihren Mitten berührenden Kugel den Wert $\sqrt{\frac{1}{16}a^2(10 + 2\sqrt{5}) - \frac{1}{4}a^2}$ oder $\frac{1}{4}a(\sqrt{5} + 1)$ hat, finden wir für die Coordinaten der zwölf Eckpunkte (A, A_1, A_2, A_3), (B, B_1, B_2, B_3), (C, C_1, C_2, C_3) des Ikosaeders in Bezug auf das System $M(X_1, X_2, X_3)$

	x_1	x_2	x_3
A	0	$\pm\frac{1}{2}a$	$\pm\frac{1}{4}a(\sqrt{5}+1)$
B	$\pm\frac{1}{4}a(\sqrt{5}+1)$	0	$\pm\frac{1}{2}a$
C	$\pm\frac{1}{2}a$	$\pm\frac{1}{4}a(\sqrt{5}+1)$	0

wobei alle Zeichencombinationen zu nehmen sind. Gehen wir nun vom Systeme $M'(X_1, X_2, X_3, X_4)$, in Bezug auf welches alle Punkte

des Ikosaeders eine $x_4 = 0$ haben, durch Verschiebung des $X_1 X_2 X_3$-Raumes nach dem neuen Coordinatenanfange O' in der Mitte des Diameters $P'Q'$ zum Systeme $O'(X_1, X_2, X_3, X_4)$ über, so ergeben sich die Coordinaten der Eckpunkte des Ikosaeders und jene der Punkte P' und Q' in der Form

x_1	x_2	x_3	x_4
$\pm\frac{1}{4}a(\sqrt{5}+1)$	0	$\pm\frac{1}{2}a$	$\pm\frac{1}{4}a(\sqrt{5}+3)$
$\pm\frac{1}{2}a$	$\pm\frac{1}{4}a(\sqrt{5}+1)$	0	$\pm\frac{1}{4}a(\sqrt{5}+3)$
0	$\pm\frac{1}{2}a$	$\pm\frac{1}{4}a(\sqrt{5}+1)$	$\pm\frac{1}{4}a(\sqrt{5}+3)$
0	0	0	$\pm\frac{1}{2}a(\sqrt{5}+1)$

Durch Einführung des doppelten Zeichens bei der x_4 der Eckpunkte des Ikosaeders sind nun zwei einander gegenüberliegende Ikosaeder des Z_a^{600} in Betracht gezogen. Und nun liegt weiter der Gedanken nahe die Betrachtung mittels Umwechslung der Coordinaten auf andere Ikosaeder auszudehnen. Setzen wir nämlich voraus, das Z_a^{600} sei in Bezug auf die verschiedenen Achsen in derselben Weise gebaut — eine Voraussetzung, welche wir nachher auf ihre Wahrheit prüfen werden —, so gelangen wir zu 96 Eckpunkten von 8 Ikosaedern und 8 Endpunkten von 4 Diametern $P'Q'$. Dabei ist zu bemerken, dass zur Erhaltung der 96 Eckpunkte immer eine gerade Zahl von Vertauschungen der Coordinaten

$$\pm\frac{1}{4}a(\sqrt{5}+1), \quad 0, \quad \pm\frac{1}{2}a, \quad \pm\frac{1}{4}a(\sqrt{5}+3)$$

in Anwendung kommen soll.

Ist die gemachte Voraussetzung richtig, so haben wir die 16 uns noch fehlenden Eckpunkte des Z_a^{600} zu bestimmen. Dabei werden wir von der Zahl 16 dieser noch fehlenden Eckpunkte zu der zweiten Voraussetzung geführt, dass diese Punkte die Eckpunkte eines Z^8 seien, von welchem die Coordinatenachsen vier dritte Querlinien sind. Da alle Ecken des Z_a^{600} vom Centrum O' die Entfernung $\frac{1}{2}P'Q' = \frac{1}{2}a(\sqrt{5}+1)$

haben, hat man den Coordinaten dieser 16 Eckpunkte den absoluten Wert $\frac{1}{4}a(\sqrt{5}+1)$ beizulegen. Und nun hat wirklich jeder dieser 16 Punkte von 12 der 96 gefundenen Ikosaedereckpunkte die Entfernung a, zum Beispiel der Punkt mit den positiven Coordinaten $\frac{1}{4}a(\sqrt{5}+1)$ von denjenigen 12 der 96 Eckpunkte, deren nicht verschwindende Coordinaten sämtlich positiv sind, u. s. w. Was mehr aussagt, es werden die beiden Voraussetzungen bewährt, indem man ein Schema der hypothetischen Coordinaten der 120 Eckpunkte des Z_a^{600} entwirft und nun nachweist, dass jeder der 120 Eckpunkte von 12 der übrigen wirklich die Entfernung a hat. Die Ergebnisse dieser Arbeit sind in Tabellen niedergelegt. Es giebt Teil A der Tabelle I in $\frac{1}{4}a$ als Einheit und mit Ersetzung von $\sqrt{5}$ durch das Symbol e die Coordinaten von 60 mit den Nummern 1, 2, .. 60 angedeuteten Eckpunkten; zu diesen gesellen sich die diametralgegenüberliegenden, welche die Nummern —1, —2, .. —60 tragen werden, mittels Umkehrung der Zeichen aller Coordinaten. Und die Tabelle II zeigt, welche Eckenpaare durch Kanten mit einander verbunden sind.

4. Es bilden die Punkte mit den Coordinaten

x_1	x_2	x_3	x_4
$3+e$	$1+e$	0	0
$-(1+e)$	$3+e$	0	0
0	0	$3+e$	$1+e$
0	0	$-(1+e)$	$3+e$

nach einander die Mitten der Kanten (53, 56), (46, —47), (33, 34), (15, —16). Deshalb wird das Z_a^{600} von der Transformation

$$\left.\begin{aligned} \lambda y_1 &= x_1 + \frac{e-1}{2}x_2, & \lambda y_2 &= -\frac{e-1}{2}x_1 + x_2 \\ \lambda y_3 &= x_3 + \frac{e-1}{2}x_4, & \lambda y_4 &= -\frac{e-1}{2}x_3 + x_4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 1)$$

senkrecht auf eine erste Querlinie gestellt. Nimmt man $\lambda = 1$, so

findet man die in Teil B der Tabelle I angegebenen Coordinaten in $\frac{1}{40} a \sqrt{10 (5 + e)}$ als Einheit.

In der nämlichen Weise führen die Mittelpunkte

x_1	x_2	x_3	x_4
$\frac{4}{3}(2+e)$	$\frac{2}{3}(1+e)$	0	0
$-\frac{2}{3}(1+e)$	$\frac{4}{3}(2+e)$	0	0
0	0	$\frac{4}{3}(2+e)$	$\frac{2}{3}(1+e)$
0	0	$-\frac{2}{3}(1+e)$	$\frac{4}{3}(2+e)$

der Flächen (1, 53, 56), (2, 46, —47), (3, 33, 34), (4, 15, —16) zur Transformation

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda' z_1 = \frac{3+e}{2} x_1 + x_2, & \lambda' z_2 = -x_1 + \frac{3+e}{2} x_2 \\ \lambda' z_3 = \frac{3+e}{2} x_3 + x_4, & \lambda' z_4 = -x_3 + \frac{3+e}{2} x_4 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad 2),$$

welche das Z_a^{600} senkrecht stellt auf eine zweite Querlinie. Für $\lambda' = \frac{1+e}{2}$ und deshalb in $\frac{1}{12} a \sqrt{3}$ als Einheit, erhält man dann die Coordinatenwerte des Teils C von Tabelle I.

Endlich bilden die Punkte

x_1	x_2	x_3	x_4
$\frac{1}{4}(11+5e)$	$\frac{1}{4}(3+e)$	$\frac{1}{4}(3+e)$	$\frac{1}{4}(3+e)$
$\frac{1}{4}(3+e)$	$-\frac{1}{4}(11+5e)$	$\frac{1}{4}(3+e)$	$-\frac{1}{4}(3+e)$
$\frac{1}{4}(3+e)$	$-\frac{1}{4}(3+e)$	$-\frac{1}{4}(11+5e)$	$\frac{1}{4}(3+e)$
$\frac{1}{4}(3+e)$	$\frac{1}{4}(3+e)$	$-\frac{1}{4}(3+e)$	$-\frac{1}{4}(11+5e)$

die Mittelpunkte der Tetraeder (1, 29, 41, 53), (—2, —19, —46, 59), (—3, —24, 35, —50), (—4, —14, —26, 40). Mittels der Transformation

$$\left.\begin{array}{llllll}
\lambda'' t_1 & = (2+e)\,x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 \\
\lambda'' t_2 & = \quad x_1 & - (2+e)\,x_2 & + x_3 & - x_4 \\
\lambda'' t_3 & = \quad x_1 & - x_2 & - (2+e)\,x_3 & + x_4 \\
\lambda'' t_4 & = \quad x_1 & + x_2 & - x_3 & - (2+e)\,x_4
\end{array}\right\} \ldots\ldots \quad 3)$$

wird das Z_a^{600} also auf eine dritte Querlinie senkrecht gestellt. Für $\lambda'' = 2$, Einheit $= \frac{1}{16}(e-1)\,a\sqrt{2}$, erhält man die Ergebnisse des Teils D von Tabelle I.

II. Coordinatenstellung des Z_a^{120}.

5. Die Mittelpunkte der Flächen eines Pentagondodekaeders bilden die Eckpunkte eines Körpers, welcher der Polarfigur des Pentagondodekaeders in Bezug auf die umgeschriebene Kugel ähnlich, mit dieser concentrisch und also ein concentrisches Ikosaeder ist; dabei gelten die aus den früher erklärten symbolischen Gleichungen

$$6\ Q_2^{12} = 6\ D^{20},\ 15\ Q_1^{12} = 15\ Q_1^{20},\ 10\ \ D^{12} = 10\ Q_2^{20}$$

folgenden Lageverhältnisse. Ganz ebenso bilden die Mittelpunkte der 600 begrenzenden Tetraeder des Z_a^{600} ein der Polarfigur Z_a^{600} in Bezug auf die umgeschriebene Hypersphere ähnliches und mit diesem concentrisches Zell, d. h. ein concentrisches Z^{120}; dabei walten die von den Gleichungen

$$300\ Q_3^{600} = 300\ D^{120},\ 600\ Q_2^{600} = 600\ Q_1^{120},$$
$$360\ Q_1^{600} = 360\ Q_2^{120},\ 60\ L^{600} = 60\ Q_3^{120}$$

angegebenen Lageverhältnisse ob.

Der letzte Satz führt uns zu den vier verschiedenen Coordinatenstellungen des Z_a^{120}, welche in der Tabelle III angegeben sind. Zur Andeutung von Entstehungsweise und Zusammensetzung dieser Tabelle mögen folgende Erläuterungen genügen. Es bilden die Teile A und B eine notwendige Vorarbeit zu den eigentlichen Coordinatenstellungen C, D, E, F. Der Teil A enthält die der zweiten Tabelle entnommenen Eckpunkte von 300 Tetraedern, welche sich mittels Zeichenumkehrung zu den 600 begrenzenden Tetraedern des Z_a^{600} ergänzen. In der nämlichen Folge, worin sich diese Tetraeder aus der zweiten Tabelle ergeben, sind die entsprechenden

Eckpunkte des Z_a^{120} von den Nummern 1, 2,... 300 und —1, —2,... —300 gekennzeichnet. Weiter giebt der Teil B an, wie die 600 Eckpunkte des Z_a^{120} von Kanten mit einander verbunden sind. So findet man angewiesen, dass die Eckpunkte 1 und 2 des Z_a^{120} Endpunkte einer nämlichen Kante sind, weil den Tetraedern (1, 29, 32, 53), (1, 29, 32, 55) die Fläche (1, 29, 32) gemeinsam ist. Und nun sind die Coordinatenwerte des Teiles C durch Addition der entsprechenden Coordinaten der Eckpunkte der Tetraeder aus Teil A der ersten Tabelle gefunden, in Anschliessung an den Satz, dass diese Summen die vierfachen Werte der Coordinaten der Tetraedermittelpunkte liefern. Nachher is dann die Länge der Kante (1, 2) berechnet und für die Coordinateneinheit den Wert $\frac{a}{2(1+e)}$ gefunden. Natürlich können dann weiter die Teile D, E, F in ganz derselben Weise aus den Teilen B, C, D der ersten Tabelle gefunden werden. Zur Verringerung der immer noch mühseligen Arbeit haben wir es aber vorgezogen die Werte der Teile D, E, F aus den entsprechenden des Teiles C mittels der Transformationen 1), 2), 3) herzuleiten.

Mittels der erhaltenen Coordinatenstellungen ist das gestellte Problem völlig erledigt, in so fern als diese uns über die bezweckten Schnitte und Projectionen alle Auskunft geben können.

III. Winkelbeziehungen zwischen Richtungen von Diagonalen und Querlinien.

6. Im Teile A der Tabelle I hat x_4 für 15 Punkte den Wert Null, für 12, 20, 12 andere Punkte nach einander die Werte 2, $1+e$, $3+e$ und für den auf OX_4 liegenden Punkt 4 den Wert $2(1+e)$. Weil $2(1+e)$ deshalb die Entfernung aller Eckpunkte des Z_a^{600} vom Centrum angiebt, bildet die Diagonale (4, —4) mit diesen 15, 12, 20 und 12 anderen Diagonalen nach einander Winkel von 90°, 72°, 60° und 36°.

Da auf jeder Diagonale des Z_a^{600} 15 andere senkrecht stehen, giebt es $\frac{60\times 15}{2} = 450$ Paare von auf einander senkrecht stehenden Diagonalen. Hat man ein solches Paar, wie (3, —3) und (4, —4), zu den Achsen OX_3 und OX_4 erwählt, so giebt es unter den anderen 58 Diagonalen nur noch ein einziges Paar (1,—1) und (2,—2), welches OX_3 und OX_4 zu einem rechtwinkligen Achsensysteme ergänzt. Deshalb bilden die 60 Diagonalen des Z_a^{600} eine

Zahl von $\frac{450}{6} = 75$ rechtwinkligen Achsensystemen und $75 \times 4 = 300$ rechtwinklige Trieder.

7. Wir untersuchen weiter, wie viel Querlinien des Z_a^{600} auf einer bestimmten Diagonale dieses Zelles senkrecht stehen. Am leichtesten erhält man diese Zahl mittels einer anderen, nämlich jener der Diagonalen, welche auf einer bestimmten Querlinie senkrecht stehen. Sind ξ_1 und η_1 diese Zahlen für den Fall einer ersten Querlinie, so wird die Zahl der rechten Winkel, von deren Schenkeln der eine eine Diagonale und der andere eine erste Querlinie ist, von den beiden Formen $60\,\xi_1$ und $360\,\eta_1$ angegeben und gilt deshalb die Beziehung $\xi_1 = 6\,\eta_1$. Und nun kann der Wert von η_1 unmittelbar dem Teile B der Tabelle I entnommen werden. Da von sechs der 60 Eckpunkte die Coordinate y_4 verschwindet, ist $\eta_1 = 6$ und $\xi_1 = 36$.

Handelt es sich um eine zweite Querlinie, so findet man für die analogen Zahlen ξ_2 und η_2 die Werte 40 und 4. Und ist von einer dritten Querlinie die Rede, so ergiebt sich $\xi_3 = 30$ und $\eta_3 = 6$, u. s. w.

IV. Senkrechte Projectionen von Z_a^{600}.

7. *Projection in der Richtung einer Zelldiagonale.* Wie wir gesehen haben, erhält der Teil A der ersten Tabelle die Coordinaten des Z_a^{600} in Bezug auf ein von vier Diagonalen gebildetes rechwinkliges System. Projiciren wir das in dieser Stellung gegebene Z_a^{600} in der Richtung der Achse OX_4 auf den Coordinatenraum $O(X_1, X_2, X_3)$, so sind die Coordinaten x_1, x_2, x_3 der Projectionen der 120 Eckpunkte in den ersten drei Verticalreihen dieser Tabelle enthalten. Wir zeichnen nun erst (Fig. 3) das Netz der Projectionen dieser Punkte auf die Ebene $O(X_1, X_3)$ und setzen nachher in einer bestimmten schrägen Richtung OX_2 das verkürzte x_2 aus.

Im erhaltenen Bilde sind die 120 Eckpunkte nach ihrer Entfernung vom Projectionsraume, welche einen der Werte $2(1+e)$, $3+e$, $1+e$, 2, 0 haben kann, in Gruppen geteilt. Auf diese Weise findet man in der bezeichneten Folge den Coordinatenanfang, die 12 Eckpunkte eines Ikosaeders (rot), die 20 Eckpunkte eines Dodekaeders (blau), die 12 Eckpunkte eines grösseren Isokaeders (rot) und die 30 Eckpunkte der Combination (D, I) von Dodekaeder und Ikosaeder in Gleichgewicht (schwarz), welche mit Ausnahme der letztgenannten Combination immer Projectionen von zwei Punkten sind. Wirklich ist auch $2(1 + 12 + 20 + 12) + 30 = 120$. Es ist auf die

Hineinzeichnung der Kanten, welche Eckpunkte von verschiedenen Gruppen unter einander verbinden, verzichtet. Nur ist in Fig. 4 angegeben, dass die 12 Eckpunkte des grösseren Ikosaeders und die 30 Eckpunkte der Combination (D, I) auf der Oberfläche des Projectionskörpers liegen und dieser eingeschlossen ist von den 20 hier schattirten Dreiecken des Ikosaeders und die 12 $\times$ 5 Seitenflächen von 12 regelmässigen fünfseitigen Pyramiden, von welchen die 12 Fünfecke der Combination (D, I) die Grundebenen und die 12 Eckpunkte des grösseren Ikosaeders die Scheitel bilden. Die Coordinaten der hinter die Oberfläche zurücktretenden Eckpunkte sind in der Tabelle durch fette Ziffern angedeutet.

Wir bemerken, dass die Combination (D, I) entweder zu einem D, oder einem I ausgebreitet wird, indem man entweder durch die Eckpunkte der Pentagonen oder durch jene der Dreiecke gerade Linien zeichnet, welche den gegenüberliegenden Seiten parallel sind.

Jeder Eckpunkt des Z_a^{600} ist mit 12 andren Eckpunkten, welche an und für sich die Eckpunkte eines Ikosaeders bilden, durch Kanten verbunden. Steht nun der Raum eines solchen Ikosaeders auf dem Projectionsraume senkrecht, so liegen die 12 Projectionen in der den beiden Räumen gemeinsamen Ebene. Dies ist (Fig. 3) zum Beispiel mit den 12 Eckpunkten (29, 32), 53, 51, (41, 44), (—42, 43), 56, —54, (—30, 31) der Fall. Es zeigt wirklich Fig. 5 die senkrechte Projection eines Ikosaeders auf die Mittelebene durch die parallelen Kanten (53, 56), (51, —54).

Weil das Z^{600} von Tetraedern begrenzt wird, wird es sich auch ereignen können, dass die Projectionen von vier Eckpunkten in einer Ebene liegen. Es zeigt das Bild des Projectionskörpers (Fig. 4), dass dies wenigstens auf der Oberfläche des Körpers nicht der Fall ist; deshalb ist es der Convexität des Zelles nach aussen zufolge überhaupt nicht der Fall.

8. *Projection in der Richtung einer ersten Querlinie.* Lassen wir vom Teile *B* der ersten Tabelle die vierte Verticalreihe bei Seite, so finden wir die verlangte Projection, welche Fig. 6 auf die nämliche Weise abbildet, jedoch nur was die an die Oberfläche des Projectionskörpers zu Tage tretenden Eckpunkte betrifft. Hingegen sind die unsichtbaren Eckpunkte in der Tabelle immer wieder mittels fetter Ziffern hervorgehoben.

Es zeigt das Bild, dass der Projectionskörper begrenzt wird von zwei einander gegenüberliegenden regelmässigen abgestumpften zehnseitigen Pyramiden, welche von einem Kranze von zehn über einander greifenden gleichen sechsseitigen Pyramiden mit einander verbunden sind und jede für sich von einer regelmässigen zehnseitigen

Pyramide abgedeckt werden. Bei Drehung des Körpers um die Diagonale (2, —2), welche wir die *Hauptdiagonale* des Körpers nennen, über einen Winkel von 36°, kommt er also mit sich selbst zur Deckung. In Verbindung mit dieser Thatsache sind die fünfzig Punkte, welche mit den Endpunkten der Hauptdiagonale die Eckpunkte des Körpers bilden, zehn zu zehn in fünf parallelen Ebenen gelagert.

Um die Gestalt des Körpers deutlicher hervortreten zu lassen sind die Seitenflächen der sichtbaren abgestumpften Pyramide wieder schattirt.

Weil die schattirten Seitenflächen Vierecke sind, sind sie die Projectionen von das Z^{600} begrenzenden Tetraedern, deren Räume auf dem Projectionsraume senkrecht stehen. Weiter stehen die Räume der Ikosaeder, deren Eckpunkte entweder mit einem der Eckpunkte (2, —2) der Hauptdiagonale oder mit einem der zehn Eckpunkte (± 1, ± 29, ± 30, ± 33, ± 34) des Aequatorzehnecks verbunden sind, auf dem Projectionsraume senkrecht. Denn indem die ersten zwei Ikosaeder sich als ein regelmässiges Zehneck projiciren, wie sie dies in ihrem eigenen Raume auf eine Mittelebene senkrecht auf einer durch den Mittelpunkt gehenden Diagnonale thun, projiciren die letzten zehn sich als Sechsecke, wie dies für das Ikosaeder vom Punkte 1 in Fig. 7 angegeben ist.

9. *Projection in der Richtung einer zweiten Querlinie.* Dem Teile C der ersten Tabelle entnehmen wir die Coordinaten der Eckpunkte der verlangten Projection, indem wir die vierte Verticalreihe bei Seite lassen. Es zeigt Fig. 8 die Lage dieser Punkte. Wie man unmittelbar erblickt, tritt hier die Diagonale (1, —1) als Hauptdiagonale auf, indem der Projectionskörper begrenzt wird von einer Reihe von sechs achtseitigen Pyramiden (mit den Scheiteln ± 2, ± 21, ± 22), mit welcher zwei vereinzelte regelmässige sechsseitige Pyramiden (mit den Scheiteln ± 1) mittels zwei von Dreiecken und Trapezen gebildeter, hier schattirter, Kragen zusammenhängen. Daher stehen hier die Räume von 12 der 600 begrenzenden Tetraeder und 8 Ikosaeder auf dem Projectionsraume senkrecht. Von diesen projiciren die sechs, deren Eckpunkte mit einem der Punkte ± 2, ± 21, ± 22 verbunden sind, sich in ein Achteck, wie es Fig. 9 für das dem Punkte 2 entsprechende Ikosaeder zeigt. Und die beiden übrigen, deren Eckpunkte mit ± 1 verbunden sind, projiciren sich, wie auf eine Ebene ihres Raumes, welche zu zwei Seitenflächen parallel ist, als regelmässige Sechsecke. Bei dieser Projection giebt es drei verschiedene Arten von Eckpunkten, indem die an der Oberfläche des Projectionskörpers liegenden Eckpunkte entweder Eckpunkte des Projectionskörpers sind (wie 57, 58,. . .) oder

nicht (wie die sechs Punkte $\pm$ 3, $\pm$ 17, $\pm$ 18). Indem die unsichtbaren Eckpunkte immer wieder mittels fetter Ziffern angedeutet sind, werden die sechs auf Kanten liegenden Punkte durch laufende Ziffern angewiessen. Es wird diese Bezeichnungsweise weiter stets gefolgt werden.

10. *Projection in der Richting einer dritten Querlinie.* Auf die nämliche Weise erhält man mittels drei Verticalreihen des Teiles D der ersten Tabelle den in Fig. 10 abgebildeten Projectionskörper. Es ist dieser Körper eine Combination (W, R) von Würfel und Rhombendodekaeder, wobei auf jeder Rhombendodekaederfläche eine sechsseitige Pyramide auftritt. Die Kanten der Combination (W, R) sind dick, die Scheitelkanten der Pyramide sind dünn gezeichnet; die Bedeutung der Schattirung wird auf Seite 19 zu Tage treten. Das Bild zeigt wieder sechs begrenzende Tetraeder, deren Räume auf dem Projectionsraume senkrecht stehen. Und offenbar thun dies auch die Räume der Ikosaeder, welche den Scheiteln der zwolf Pyramiden entsprechen. Es zeigt Fig. 11 die Projection des Ikosaeders, deren Eckpunkte mit 49 verbunden sind.

V. Senkrechte Projectionen Z_a^{120}.

11. *Projection in der Richtung einer dritten Querlinie.* Das Bild der Fig. 12 wird erhalten, wenn man vom Teile C der dritten Tabelle die vierte Verticalreihe bei Seite lässt. Es wird dieser Projectionskörper von 12 regelmässigen Fünfecken und von 30 Sechsecken begrenzt; die ersten rühren von Seitenflächen her, deren Ebene, die letzten rühren von Dodekaedern her, deren Räume auf dem Projectionsraume senkrecht stehen. Die Lage der 20 Eckpunkte des ersten Dodekaeders der dritten Tabelle zeigt Fig. 13.

12. *Projection in der Richtung einer zweiten Querlinie.* Dem Teile D der dritten Tabelle entnimmt man die Coordinaten der 160 Eckpunkte des in Fig. 14 dargestellten Projectionskörpers. Wie das Bild zeigt, hat dieser Körper einen von zehn Achtecken gebildeten Aequatorialkranz, welcher an beiden Seiten mittels eines Kragens von 40 Fünfecken mit einem Polzehnecke zusammenhängt. Drehung des Körpers um die Verbindungslinie der Mittelpunkte dieser Zehnecke über einen Winkel von 36° bringt ihn mit sich selbst zur Deckung. Hiermit in Einklang sind die 160 Eckpunkte in zwölf parallelen Ebenen gelagert, welche nach einander 10, 10, 10, 20, 20, 10—, 10, 20, 20, 10, 10, 10 dieser Punkte aufnehmen. Es war diese Thatsache in Verbindung mit Fig. 6 zu erwarten. Wirklich ist die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Zehnecke von

Fig. 14 mit der Hauptdiagonale (2, —2) von Fig. 6 identisch. Und dies muss so sein, weil das von uns projicirte Z^{120} die 600 Mittelpunkte der begrenzenden Tetraeder des Z_a^{600} zu Eckpunkten hat.

Dem Bilde nach stehen die Räume von 12 der 120 begrenzenden Dodekaeder auf dem Projectionsraume senkrecht. Indem zwei von ihnen sich als regelmässige Zehnecke projiciren, wie sie es in ihrem eigenen Raume auf eine ihrer Ebenen thun, projiciren die zehn übrigen sich wie Fig. 15 zeigt als Achtecke.

Die 30 an der Oberfläche liegenden Punkte, welche keine Eckpunkte des Projectionskörpers sind, liegen auf die von Fig. 15 angegebene Weise in folgender Anordnung auf den zehn vom Aequator senkrecht halbirten Kanten (4, **1**, **3**, **2**, 5), (10, **7**, **8**, **6**, 9), (—194, **—191**, **—288**, **—111**, —114), (—247, **—48**, **—243**, **—43**, —245), (—134, **—131**, **—284**, **—91**, —94) und die nämlichen, worin alle Zeichen umgekehrt sind.

In den Teilen *D*, *E*, *F* der dritten Tabelle sind die im Innern der Acht-, Zehn- und Zwölfecken, also nicht auf Kanten liegenden Eckpunkte in der nämlichen Weise, wie die unsichtbaren Punkte angedeutet; in den Zeichnungen sind diese Punkte nicht angegeben.

13. *Projection in der Richtung einer ersten Querlinie.* Bei diesem aus dem Teile *E* der dritten Tabelle zu schöpfenden Körper (Fig. 16) findet man einen Aequatorialgürtel von sechs nicht zusammenhängenden Zehnecken und zwei Polzwölfecken, welche acht Vielecke mittels Fünfecke unter einander verbunden sind. Es tritt die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Zwölfecke als Achse auf; eine Drehung von 60° um diese Achse bringt den Körper mit sich selbst zur Deckung. Offenbar muss diese Achse mit der Hauptdiagonale (1, — 1) von Fig. 8 zusammenfallen.

Die Figuren 17 und 18 zeigen, wie ein Dodekaeder sich projicirt als ein symmetrisches Zehneck und ein halbregelmässiges Zwölfeck.

14. *Projection in der Richtung einer Zelldiagonale.* Zum letzten führt Teil *F* von der dritten Tabelle zum Körper der Fig. 19, welcher von zwölf Zehnecken und von 72 Fünfecken begrenzt wird.

VI. Allgemeines über Centralschnitte der beiden Zellen.

15. In unsren beiden vorhergehenden Aufsätzen haben wir uns öfters der Reciprocität in Bezug auf eine Hypersphere bedient, um aus den senkrechten Projectionen des einen Zelles die Centralschnitte

des ihm dualistisch gegenüber stehenden Zelles abzuleiten. Dieser Beziehung nach erhalten wir in Verbindung mit den gefundenen Ergebnissen die in folgende Tabelle niedergelegten Resultate:

Projectionen von		D	Q_1	Q_2	Q_3		Schnitte von
Z^{600}	E. . . .	42	52	56	44	. . . . F	Z^{120}
	K. . . .	120	130	150	120	. . . . K	
	F. . . .	10	80	96	78	. . . . E	
Z^{120}	E. . . .	158	180	160	80	. . . . F	Z^{600}
	K. . . .	240	282	250	120	. . . . K	
	F. . . .	84	104	92	42	. . . . E	
		Q_3	Q_2	Q_1	D		

Diese kleine Tabelle [1]), welche von oben und nach rechts gelesen die Projectionen, von unten und nach links gelesen die Schnitte kennzeichnet, wobei die Anordnung von D, Q_1, Q_2, Q_3 in Q_3, Q_2, Q_1, D umkehrt, zeigt was wir bei der Bestimmung der Centralschnitte zu erwarten haben; so muss der Schnitt des Z^{600} mit dem Mittelraume senkrecht zu einer Q_2 ein Körper sein, der 104 Eckpunkte, 282 Kanten und 180 Seitenflächen hat, u. s. w.

16. Wir weisen hier auf die merkwürdige Thatsache hin, dass die drei Zahlen des oberen Teiles der ersten Verticalreihe den von

---

[1]) Indem bei Z^5 keine Geraden D, Q_1, Q_2, Q_3 auftreten und die Resultaten bei Z^8 und Z^{16} nur sehr unvollkommen von einer Tabelle der Eckpunkte, Kanten und Seitenflächen gekennzeichnet wird, kann es nützlich sein die bei Z^{24} gefundenen Ergebnisse in eine Tabelle niederzulegen. Sie ist die folgende:

		D	Q_1	Q_2	Q_3		
Projectionen	E. . . .	14	14	18	12	. . . F	Schnitte
	K . . .	24	30	42	24	. . . . K	
von Z^{24}.	F. . . .	12	18	26	14	. . . . E	von Z^{24}.
		Q_3	Q_2	Q_1	D		

Bei Z^5 treten die Räume, welche eine Kante senkrecht halbiren, als Symmetrieräume auf, u. s. w.

unten gelesenen drei Zahlen des unteren Teiles der letzten Verticalreihe gleich sind. Diese Coincidenz ist nicht zufällig, vielmehr der Ausdruck eines allgemeinen Gesetzes, das wir in den beiden vorhergehenden Aufsätzen wohl bewährt sahen, dort jedoch noch nicht ausdrücklich hervorgehoben haben. Es ist dies, dass Projection auf einen Mittelraum und Schnitt mit diesem völlig zusammenfallen, wenn dieser Mittelraum ein Symmetrieraum des Zelles ist. Wie unmittelbar einleuchtet, ist diese Coincidenz eine Folge von zwei aequivalenten Conventionen, welche einander dualistisch gegenüber stehen: erstens dass man bei der Projection die sich im Innern des Projectionskörpers projicirenden Eckpunkte unberücksichtigt lässt, zweitens dass man beim Schnitte nur diejenigen Schnittpunkte der Kanten in Betracht zieht, welche zwischen den beiden Kantenendpunkten liegen. Denn diese Annahmen sind Ursache, dass man sich im Falle eines Symmetrieraumes R zu in R liegenden Punkten und Kanten und zu auf R senkrecht stehenden Kanten, Seitenflächen und Grenzkörpern beschränken kann.

17. In gedrängter Kürze deuten wir hier die mit dem angegebenen Gesetze in Einklang stehenden Ergebnisse der beiden vorhergehenden Arbeiten an.

Beim Z_a^8 giebt es zwei Arten von Symmetrieräumen, Mittelräume R_3 senkrecht auf einer Q_3, Mittelräume R_2 senkrecht auf einer Q_2. Für die ersteren werden Projection und Schnitt vom nämlichen Würfel W_a, für die letzteren werden sie vom nämlichen Parallelopiped $P_{a,a,a\sqrt{2}}$ gebildet. Deshalb finden wir bei der reciproken Polarfigur, beim Z_a^{16}, Symmetrieräume R_d senkrecht auf einer D und R_1 senkrecht auf einer Q_1. Für die R_d bildet die nämliche vierseitige Doppelpyramide, für die R_1 bildet das nämliche Octaeder O_2 Projection und Schnitt.

Weil die Polarfigur des Z^{24} in Bezug auf eine concentrische Hypersphere ein neues Z^{24} in anderer Stellung ist, hat es zwei Arten von Symmetrieräumen, R_d senkrecht auf D und R_3 senkrecht auf Q_3 aufzuweisen. Für R_d bildet ein nämliches Rhombendodekaeder, für R_3 bildet eine nämliche Combination (W, O) Projection und Schnitt.

18, Wie die zwei die Coordinaten von den Eckpunkten des Z^{600} und Z^{120} enthaltenden Tabellen unmittelbar zeigen, ist jeder Mittelraum R_d senkrecht auf D Symmetrieraum von Z^{600} und deshalb auch jeder Mittelraum R_3 senkrecht auf Q_3 (von Z^{120}) Symmetrieraum von Z^{120}. Daher die Coincidenz von Projection und Schnitt bei Z^{600} für R_d und bei Z^{120} für R_3. Wirklich sind (Fig. 4) die Eckpunkte der gleichseitigen Dreiecke und (Fig. 12) die Eckpunkte

der regelmässigen Fünfecke im Schnittraume enthalten und bilden die übrigen Eckpunkte, welche alle zwei Nummern tragen, zu gleicher Zeit die Projection dieser Punktepaare und den in der Mitte liegenden Schnittpunkt der in diesen Punkten endenden senkrechten Kante. Es ist diese Uebereinstimmung die Ursache, warum beide Figuren auf derselben Tafel abgebildet sind.

Es liegt uns also jetzt noch ob von Z^{600} die Schnitte mit Mittelräumen senkrecht auf Q_1, Q_2, Q_3, von Z^{120} die Schnitte mit Mittelräumen senkrecht auf Q_2, Q_1, D in Bild zu bringen. Dies wird am einfachsten geschehen, indem man für jeden Fall 1^0. die im Schnittraume liegenden Eckpunkte und 2^0. die an verschiedenen Seiten des Schnittraumes liegenden Kantenendpunkte mit dem vom Schnittpunkte bestimmten Teilungsverhältnis aufsucht.

VII. Die Centralschnitte von Z^{600}.

19. *Centralschnitt mit einem* R_1. Dem Teile B der ersten Tabelle nach sind die 92 Eckpunkte des Schnittkörpers leicht in der Projection Fig. 6 nachzuweisen. Sie sind:

1^0. die 12 im Schnittraume ($y_4 = 0$) liegenden Punkte ± 1, ± 2, u.s.w., welche die Endpunkte der Hauptdiagonale und die Eckpunkte des Aequatorzehnecks bilden;

2^0. die Mitten a, a' der 40 parallelen Seiten (17, 57), (21, 5), u.s.w. der 20 Trapezia;

3^0. die Punkte b, welche die 20 anderen Seiten dieser Trapezia in ein bestimmtes Verhältnis schneiden;

4^0. die Punktepaare, welche die 10 Schnittlinien zwischen 21 und 13, 22 und 14, u.s.w. der Grundebenen der über einander greifenden Pyramiden nach einem bestimmten Verhältnisse und nach dem reciproken Verhältnisse schneiden.

Deshalb wird der Schnitt erhalten, indem man in der Projection Fig. 6 die neuen Punkte hineinzeichnet und die Verbindungsgeraden anbringt; dies ist in Fig. 6^{bis} ausgeführt. Es wird, wie man sieht, der Schnittkörper von 20 symmetrischen Vierseiten und 100 Dreiseiten begrenzt. Es tritt die Reciprocität zwischen den Körpern Fig. 14 und Fig. 6^{bis} nach dem bekannten Gesetze ganz unverletzt auf. Dem letzten Ergebnis, dass der Schnittkörper von 20 Vierecken und 100 Dreiecken begrenzt wird, entspricht die Thatsache, dass der Projectionskörper 20 vierflächige und 100 dreiflächige Eckpunkte aufzuweisen hat, u.s.w.

20. *Centralschnitt mit einem* R_2. Auf die nämliche Weise ist mit Hilfe von Teil C der ersten Tabelle Fig. 8^{bis} entstanden. Es sind hier die 104 Eckpunkte des Schnittkörpers:

1⁰. die acht im Schnittraume liegenden Punkte ± 1, ± 2, u.s.w., welche die Eckpunkte der Hauptdiagonale und die Scheitel der sechs Aequatorialpyramiden bilden;

2⁰. die Mitten a, a' der 24 parallelen Seiten der 12 Trapezia;

3⁰. die 24 Punkte b, welche die anderen Seiten der Trapezia nach bestimmtem Verhältnisse teilen;

4⁰. die 6 Punktepaare c c, welche dies die Mittellinien (29, —30), u.s.w. der beiden Zwölfecken thun;

5⁰. die 12 Punktepaare d d, welche dies die Untenseiten (5, 57), (57, 45), u.s.w. der Kragenfalten thun;

6⁰. die Punktepaare e e, welche die sechs Kanten (57, 58), u.s.w. nach Verhältnissen λ und $\frac{1}{\lambda}$ teilen.

Wir lenken die Aufmerksamkeit auf die völlige Reciprocität der Figuren 16 und 8^bis^.

21. *Centralschnitt mit einem* R_3. Mit Hilfe des Teiles D bildet man den Projectionskörper Fig. 10 in den dem Bilde der Fig. 19 reciprok gegenüber stehenden Schnittkörper Fig. 10^bis^ um. Es sind hier die 84 Eckpunkte:

1⁰. die 12 im Schnittraume liegenden Scheitel ± 55, u.s.w. der sechsseitigen Pyramiden;

2⁰. die Mitten a, b, c, d der 24 Seiten der sechs Quadrate;

3⁰. die Punktepaare ee', ff', gg', welche die von den Seiten des Quadrates verschiedenen Seiten der Grundebenen der 12 Pyramiden nach bestimmten Verhältnissen λ und $\frac{1}{\lambda}$ teilen.

VIII. Die Centralschnitte von Z^{120}.

22. *Centralschnitt mit einem* R_2. Die 80 Eckpunkte des Schnittes sind nach dem Teile D der dritten Tabelle:

1⁰. die 20 vierflächigen Eckpunkte 86, u.s.w. des Projectionskörpers Fig. 14, welche im Schnittraume liegen;

2⁰. die Mitten a der 20 Seiten (24, 25) u.s.w. der beiden Polzehnecke;

3⁰. die Mitten b der 20 Seiten (103, 109) u.s.w. der zehn Aequatorachtecke;

4⁰. die Punktepaare c c, welche die Schnittlinien (114, 194) der Ebenen dieser Aequatorachtecke nach bestimmten Verhältnissen λ und $\frac{1}{\lambda}$ teilen.

So ist das Bild Fig. 14bis des Schnittkörpers entstanden; es ist dem Bilde der Fig. 6 reciprok verwandt.

23. *Centralschnitte mit einem* R_1. Mittels des Teiles E der dritten Tabelle wird aus dem Projectionskörper von Fig. 16 der Schnittkörper Fig. 16bis abgeleitet, welcher dem Körper der Fig. 8 reciprok gegenüber steht. Es sind die 96 Eckpunkte:

1°. die 24 im Schnittraume liegenden Punkte, welche aus den 12 Aequatorpunkten 25, 258, u.s.w. und den 12 vierflächigen Eckpunkten 99, u.s.w. bestehen;

2°. die Mitten a der 12 Linien (37, 38) u.s.w.;

3°. die Mitten b der 12 Linien (17, 20) u.s.w.;

4°. die Punkte c, welche die 24 Linien (99, 100), u.s.w. nach bestimmtem Verhältnisse teilen;

5°. die Punkte d, welche dies die 24 Linien (23, 37), u.s.w. thun.

24. *Centralschnitt mit einem* R_d. Teil F der dritten Tabelle thut aus dem Projectionskörper von Fig. 19 den Schnittkörper von Fig. 19bis hervorgehen. Es sind die 78 Eckpunkte dieses letzteren mit Fig. 10 reciprok verwandten Körpers:

1°. die 54 im Schnittraume liegenden Punkte, von welchen sechs ($\pm$ 4, $\pm$ 32, $\pm$ 55) auf den Coordinatenachsen liegen und die 48 übrigen Endpunkte sind von Kanten, welche zwei Zehnecke mit einander verbinden;

2°. die Mitten a der 24 Kanten, (2, 5), u.s.w.

IX. Projections- und Schnittkörper, welche Combinationen von Krystallformen sind.

25. Indem wir uns auf das reguläre System beschränken, wollen wir zum Schluss noch kurz hervorheben, dass die Körper 10, 10bis, 19, 19bis Combinationen von Krystallformen sind. Deuten wir die sieben bekannten Formen Hexaeder, Octaeder, Rhombendodekaeder, Tetrakishexaeder, Triakisoctaeder, Ikositetraeder und Hexakisoctaeder durch die Symbole H, O, R, Th, To, I, Ho an, so ist dies im folgenden durchsichtigen Schema angegeben:

Fig. 10 . . . $(1, 41, 53, 29) = H$, $(1, 31, 41) = Th$, $(1, 31, -54) = Ho$.

Fig. 10bis . . $(a, b, c, d) = H$, $(e, f, g) = O$, $(a, b, h) = I$, $(f, g, 31) = To$, $(b, h, 55) = Ho$, $(g, h, 31) = Ho'$.

Fig. 19 . . . $(1, 2, 5, 3, 4) = Th$, $(3, 5, 9, 13, 11) = I$, $(9, 13, -235, -288, 293) = I'$, $(2, 5, 9, 293, -298, -300, -219, -220, 216, 283) = R$.

Fig. 19bis . . $(4, 9, 13) = I$, $(9, -298, -220, 283) = R$, $(9, 13, -236 \ldots) = O$.

Es würde ein Leichtes sein die Parameterverhältnisse der beiden *Ho* von Fig. 10^{bis} und *I* von Fig. 19 zu berechnen. Um nicht zu weitläufig zu werden wollen wir darauf aber verzichten.

Obgleich die Körper 10 und 19^{bis}, 19 und 10^{bis} einander reciprok sind in Bezug auf eine bestimmte Hypersphere, kommt diese Beziehung hier nicht zum Ausdruck, weil bei den Krystalformen einseitig nur auf die Flächen, nicht auch auf die Eckpunkte geachtet wird.

Groningen, April 1894.

ERKLÄRUNG DER TAFELN.

α. Sechshundertzell $= Z^{600}$.

Fig. Tab.

1. I. Bestimmung des Radius der dem Ikosaeder umgeschriebenen Kugel.

2. » Einfachste Coordinatenstellung des Ikosaeders; die Coordinatenachsen sind erste Querlinien. Diese Stellung is auf zwei verschiedene Weisen möglich (gekreuzte Stellung).

3. II. Senkrechte Projection des Z^{600} in der Richtung einer Zelldiagonale. Es zeigt das Bild die schichtsweise Lagerung der 120 Eckpunkte. Von innen nach aussen fortschreitend findet man den Coordinatenanfang O, die 12 Eckpunkte eines Ikosaeders (rot und dünn), die 20 Eckpunkte eines Dodekaeders (blau), die 12 Eckpunkte eines grösseren Ikosaeders (rot und dick), welche Punkte Projectionen von zwei Eckpunkten sind und die einfach zählenden 30 Eckpunkte der Combination (D, I) von Dodekaeder und Ikosaeder in Gleichgewicht (schwarz).

4. I. Am Tage tretende Eckpunkte, Kanten und Flächen des vorhergehenden Projectionskörpers, welcher zu gleicher Zeit den Schnitt des Z^{600} mit dem Projectionsraume bildet. Es sind die Eckpunkte die 12 Eckpunkte des grösseren Ikosaeders und die 30 Eckpunkte der Combination (D, I). Die 80 einschliessenden Dreiecke teilen sich in 20 hier schattirte, deren Ebenen bei Ausbreitung das Ikosaeder der Combination (D, I) liefern, und in die 60 Seitenflächen von 12 regelmässigen fünfseitigen Pyramiden, deren Grundebenen bei Ausbreitung das Dodekaeder der Combination (D, I) bilden und deren Scheitel die oben genannten Eckpunkte des grösseren Ikosaeders sind.

Fig.	Tab.	
5.	I.	Senkrechte Projection eines Ikosaeders auf die Mittelebene durch zwei parallele Kanten, d. h. in der Richtung einer ersten Querlinie, als Sechseck.
6.	III.	Senkrechte Projection des Z^{600} in der Richtung einer ersten Querlinie. Es tritt für diesen Projectionskörper die Diagonale (2, —2) als Hauptdiagonale auf, indem die 50 übrigen Eckpunkte sich zu 10 in fünf auf dieser Diagonale senkrecht stehenden Ebenen lagern und eine Drehung von 36° um diese Diagonale den Körper in sich transformirt (krystallographische Achse mit der Periode 10). Die Begrenzung besteht aus zwei einander gegenüberliegenden, hier schattirten, regelmässigen abgestumpften zehnseitigen Pyramiden (gemässigte Zonen), welche von einem Kranze von zehn über einander greifenden gleichen sechsseitigen Pyramiden (Aequator) mit einander verbunden sind und jede für sich von einer regelmässigen zehnseitigen Pyramide (Polgegend) abgedeckt werden.
6^{bis}.	»	Schnitt des Z^{600} mit dem Mittelraume senkrecht auf einer ersten Querlinie. In eine schwach angegebene Wiederholung der vorhergehenden Projection ist der Schnitt mit schweren Linien hineingetragen. Auch für diesen Schnittkörper tritt die Diagonale (2, —2) als Achse mit der Periode 10 auf, in dem die 90 übrigen Eckpunkte in neun Ebenen senkrecht auf dieser Geraden die Eckpunkte sind von neun regelmässigen Zehnecken. Es wird der Körper von 20 Deltoiden und 100 Dreiecken begrenzt. Um die Regelmässigkeit in Bezug auf die Achse deutlich hervortreten zu lassen, sind zwei Kränze von Dreiecken schattirt.
7.	I.	Senkrechte Projection eines Ikosaeders auf die Mittelebene durch eine Körperdiagonale und eine auf dieser Geraden senkrecht stehende erste Querlinie, als Sechseck.
8.	IV.	Senkrechte Projection des Z^{600} in der Richtung einer zweiten Querlinie. Hier tritt die Diagonale (1, —1) als Achse mit der Periode 6 auf, und lagern die übrigen 54 Eckpunkte sich zu 6, 12, 6, 6, 6, 12, 6 in sieben senkrecht auf dieser Geraden stehende Ebenen. Es projiciren die Punkte $\pm$ 3, $\pm$ 17, $\pm$ 18 sich als Mitten von Kanten. Die Begrenzung besteht aus einer Reihe von sechs achtseitigen Pyramiden (Aequator), von welcher zwei vereinzelte regelmässige sechsseitige Pyramiden (Pole) mittels zwei von Dreiecken und Trapezen gebildeter, hier schattirter, Kragen (gemässigte Zonen) getrennt sind.

Fig.	Tab.	
8bis.	IV.	Schnitt des Z^{600} mit dem Mittelraume senkrecht auf einer zweiten Querlinie. In eine schwach angegebene Wiederholung der vorhergehenden Projection ist der Schnitt mit schweren Linien hineingezeichnet· Es bleibt die Diagonale (1, —1) Achse mit der Periode 6; in elf Ebenen senkrecht auf ihr liegen nach einander 12, 12, 6, 12, 6, 6, 6, 12, 6, 12, 12 übrige Punkte. Der Körper wird begrenzt von 12 gleichschenkligen Trapezen (schattirt), 12 Deltoiden (schattirt) und 156 Dreiecken (24 schattirt und 132 nicht schattirt). Diese Flächen bilden eine Aequatorialreihe von sechs zehnseitigen Pyramiden, zwei zwölfseitige Polarpyramiden und zwei von Trapezen, Deltoiden und Dreiecken gebildete gemässigte Zonen; dabei ist die Schattirung so getroffen, dass die verschiedenen Teile der Zonen deutlich hervortreten
9.	I.	Senkrechte Projection des Ikosaeders auf die Mittelebene durch eine erste Querlinie und eine zu dieser senkrechte zweite Querlinie, als Achteck.
10.	»	Senkrechte Projection des Z^{600} in der Richtung einer dritten Querlinie. Grundform dieses Körpers ist eine Combination (W, R) von Würfel und Rhombendodekaeder; die Kanten dieser Combination sind mittels dicker Linien angegeben. Auf jeder Rhombendodekaederfläche sitzt eine sechsseitige Pyramide auf. Die Würfelflächen sind leicht schattirt. Die Seitenflächen der sechsseitigen Pyramiden sind teils nicht, teils schwer schattirt; bei Ausbreitung bilden die ersten ein Pyramidenwürfel (Tetrakishexaeder) und die letzteren ein Hexakisoctaeder.
10bis.	»	Schnitt des Z^{600} mit dem Mittelraume senkrecht auf einer dritten Querlinie. In eine schwach angegebene Wiederholung der vorhergehenden Projection ist der Schnitt mit starken Linien hervorgehoben. Es wird dieser Körper begrenzt von 158 Dreiecken, von welchen bei Ausbreitung 6 und 48 nicht schattirte ein Hexaeder und ein Hexakisoctaeder, 24 und 48 leicht schattirte ein Triakisoctaeder und ein Hexakisoctaeder, 24 und 8 schwer schattirte ein Ikositetraeder und ein Octaeder bilden,
11	»	Senkrechte Projection eines Ikosaeders in der Richtung der Schnittlinie von zwei Seitenflächen, welchen wohl ein Eckpunkt aber keine Kante gemeinsam ist, als Sechseck.

β. Hundertzwanzigzell $= Z^{120}$.

Fig. Tab.

12. II. Senkrechte Projection des Z^{120} in der Richtung einer dritten Querlinie. Der Körper wird von 42 Flächen eingeschlossen. Die 12 schattirten, welche regelmässige Fünfecke enthalten, bilden bei Ausbreitung ein Dodekaeder; die 30 nicht schattirten liefern auf dieselbe Weise eine den Eckpunkten nach genommene Combination (D, I) von Dodekaeder und Ikosaeder in Gleichgewicht *). Es sind also die von den Pentagoneckpunkten des Körpers verschiedenen Eckpunkte die Eckpunkte eines Dodekaeders. Der Körper ist dem in Fig. 4 angegebenen Schnitte reciprok verwandt.

13. I. Senkrechte Projection des Dodekaeders in der Richtung einer Kante, als Sechseck.

14. V. Senkrechte Projection des Z^{120} in der Richtung einer zweiten Querlinie. Dieser Körper wird von 2 regelmässigen Zehnecken, 10 Achtecken und 80 Fünfecken begrenzt; er hat die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Zehnecke zur Achse mit der Periode 10. Es liegen also die 120 Eckpunkte zu 10 in 12 Ebenen senkrecht auf dieser Achse. Der Aequatorialkranz von 10 Achtecken und die Polarzehnecke sind schattirt; ausserdem ist der mittlere Teil der verbindenden Zonen schattirt um ihre Regelmässigkeit hervortreten zu lassen. Reciprocität zu Fig. 6^{bis}.

14^{bis}. » Schnitt des Z^{120} mit dem Mittelraume senkrecht auf einer zweiten Querlinie. In eine schwach angegebene Wiederholung des vorhergehenden Körpers ist der Schnitt hineingetragen. Die Achse mit der Periode 10 bleibt erhalten; es lagern sich die 80 Eckpunkte in 8 zu ihr senkrechte Ebenen. Der Körper zeigt einen Aequatorialkranz von 10 Sechsecken (schattirt),

---

*) Es ensteht eine Combination den Eckpunkten nach von Würfel und Octaeder, wenn man auf die Seitenflächen gleiche regelmässige Pyramiden aufsetzt; so entstehen Pyramidenwürfel und Pyramidenoctaeder, je nachdem man entweder vom Würfel oder vom Octaeder ausgeht. Die Combination in Gleichgewicht ist der Rhombendodekaeder.

Bei der Combination (D, I) den Eckpunkten nach erhält man ein auf jeder Seitenfläche eine dreiseitige Pyramide tragendes Ikosaeder und ein auf jeder Seitenfläche eine fünfseitige Pyramide tragendes Dodekaeder; in beiden Fällen ist die zahl der Flächen 60. Bei der Combination in Gleichgewicht wird die Zahl der Flächen also 30.

Fig. Tab.

zwei Polarzehnecke und zwei von 10 gleichschenkligen Trapezen (schattirt) und 10 Fünfecken gebildete Zonen. Reciprocität zu Fig. 6.

15. I. Senkrechte Projection des Dodekaeders auf eine Mittelebene durch eine erste und eine zu dieser senkrechte zweite Querlinie, als Achteck.

16. VI. Senkrechte Projection des Z^{120} in der Richtung einer ersten Querlinie. Dieser Körper wird von 2 regelmässigen Zwölfecken, (leicht schattirt), 6 Zehnecken (nicht schattirt) und 96 Fünfecken (teilweise schwer, leicht und nicht schattirt) begrenzt. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Zwölfecke ist Achse mit der Periode 6; es lagern die 180 Eckpunkte sich entweder zu 12 oder zu 6 in 19 Ebenen senkrecht auf ihr. Die Schattirung ist so gewählt, dass der regelmässige Bau des Körpers deutlich hervortritt. Reciprocität zu Fig. 8^{bis}.

16^{bis}. VI. Schnitt des Z^{120} mit dem Mittelraume senkrecht auf einer ersten Querlinie. In eine schwach angegebene Wiederholung des vorhergehenden Körpers ist der Schnitt hineingezeichnet. Es bleibt die Achse mit der Periode 6 behalten; es lagern sich die 96 Eckpunkte entweder zu 12 oder zu 6 in 11 Ebenen senkrecht auf ihr. Der Körper zeigt einen Aequatorialgürtel von 6 Achtecken (nicht schattirt), 12 Sechsecken (schattirt) und 24 Vierecken (schattirt), zwei Zonen von 6 Sechsecken (nicht schattirt) und zwei Polarsechsecken (nicht schattirt). Reciprocität zu Fig. 8.

17. I. Senkrechte Projection des Dodekaeders auf eine Mittelebene durch eine Körperdiagonale und eine zu ihr senkrechte erste Querlinie, als Zehneck.

18. I. Senkrechte Projection des Dodekaeders in der Richtung einer Korperdiagonale, als Zwölfeck.

19. VII. Senkrechte Projection des Z^{120} in der Richtung einer Zelldiagonale. Dieser Körper wird von 12 Zehnecken und 72 Fünfecken begrenzt. Die Ausbreitung der Ebenen von den 12 facettenartigen, nicht schattirten Zehnecken liefert ein Rhombendodekaeder, jene der 24 leicht schattirten Fünfecke ein Ikositetraeder, jene der 48 schwer schattirten Fünfecke ein zweites Ikositetraeder und ein Pyramidenwürfel. Reciprocität zu Fig. 10^{bis}.

Fig.	Tab.	
19^{bis}.	VII.	Schnitt des Z^{120} mit dem Mittelraume senkrecht auf eine Zelldiagonale. In eine schwach angegebene Wiederholung des vorhergehenden Körpers ist der Schnitt hervorgehoben. Der neue Körper wird von 20 Sechsecken und 24 Fünfecken begrenzt. Bei Ausbreitung liefern die 12 nicht schattirten Sechsecke ein Rhombendodekaeder, die 8 leicht schattirten Sechsecke ein Octaeder und die 24 schwer schattirten Fünfecke ein Ikositetraeder. Reciprocität zu Fig. 10.

ERRATA.

In Tabelle III (drittes Blatt) ist unter F in der Horizontallinie von 219 für **3+e** und **—(3+e)** zu lesen 3+e und —(3+e).

Fig 1.

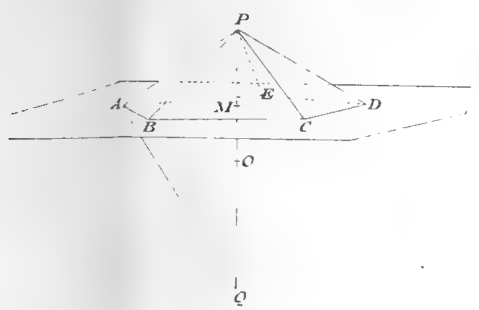


Fig 2

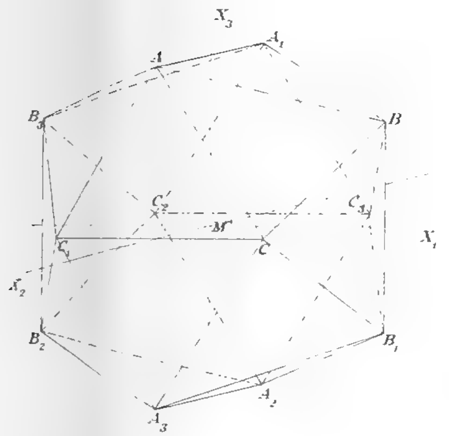


Fig 5.

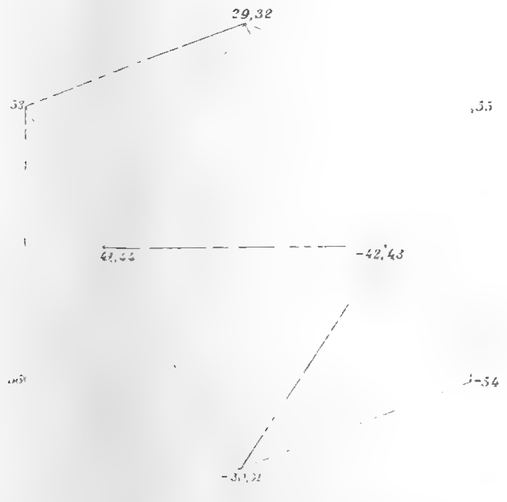


Fig 4.

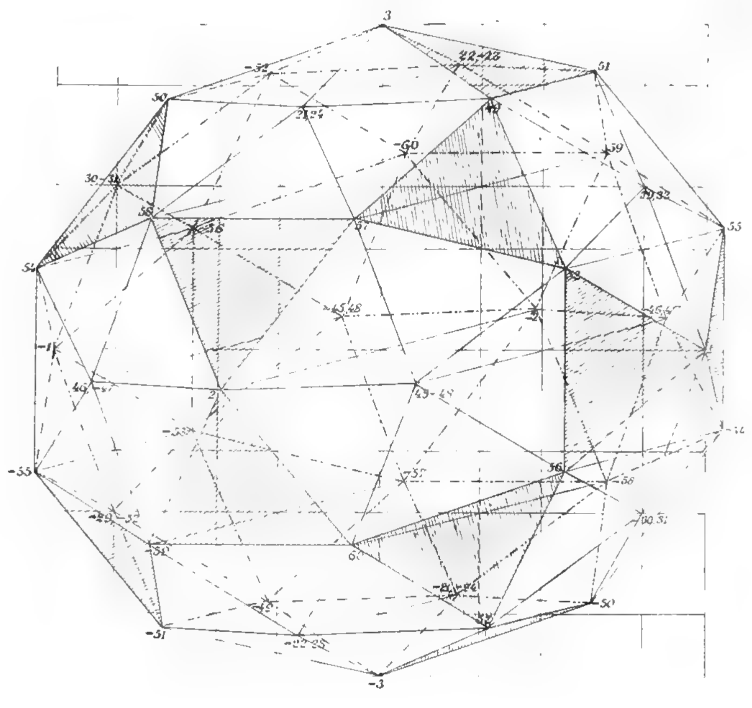


Fig 10

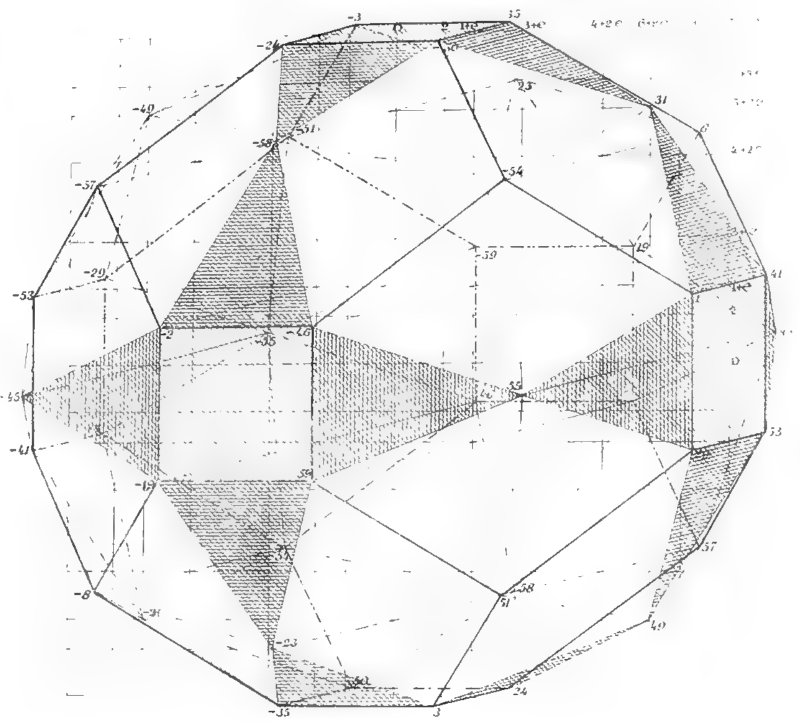


Fig 10^{bis}

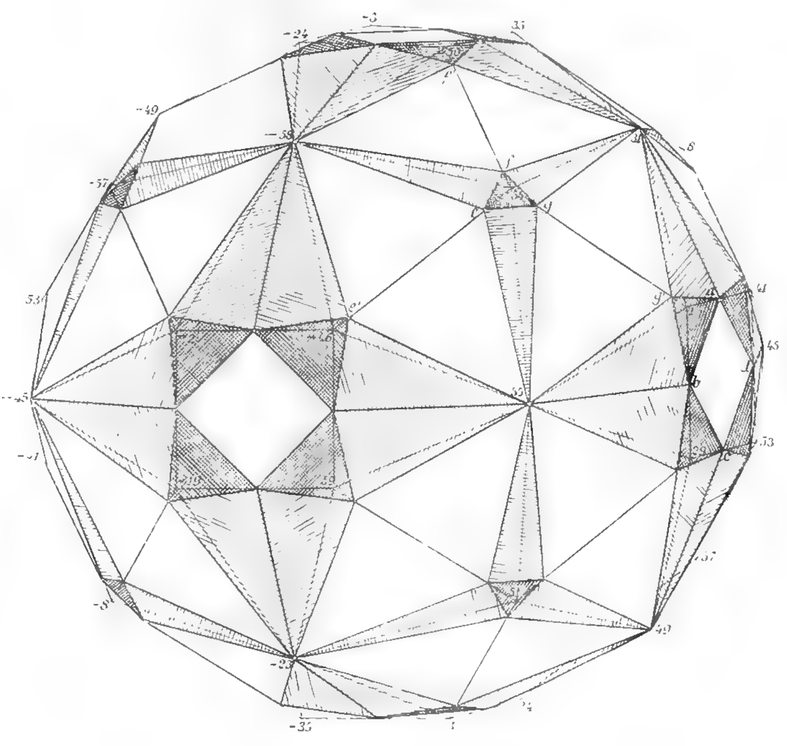


Fig 13

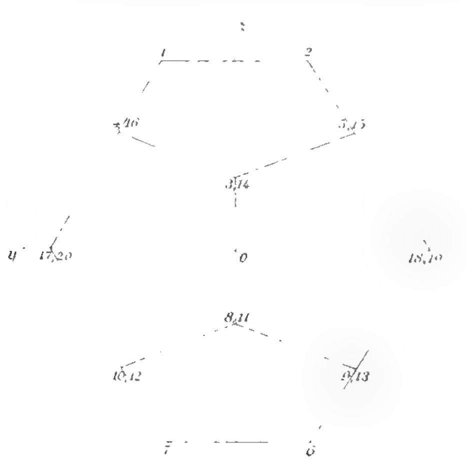


Fig 15.

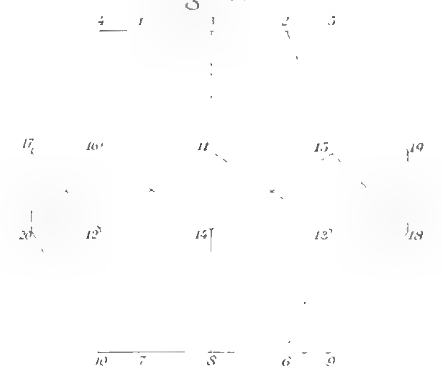


Fig 17

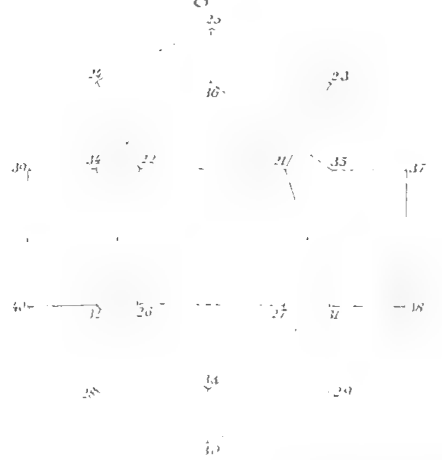


Fig 7

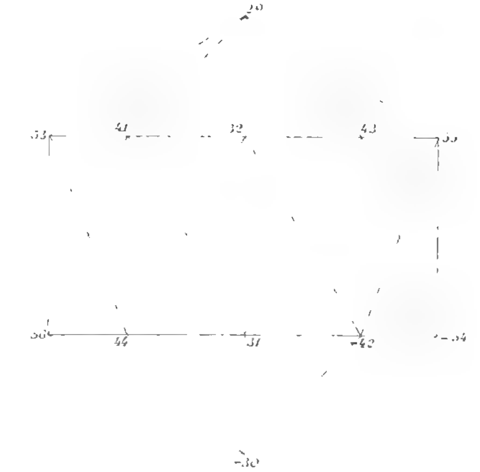


Fig 9

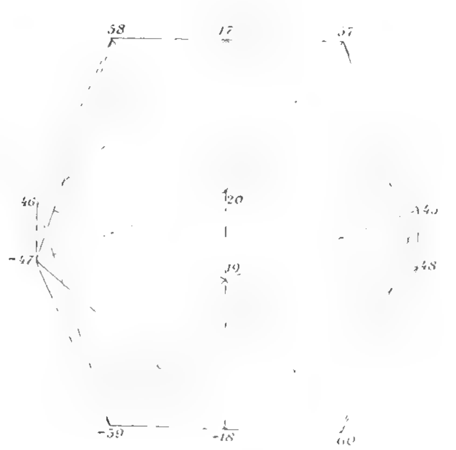


Fig 11

Fig 18

Fig. 3.

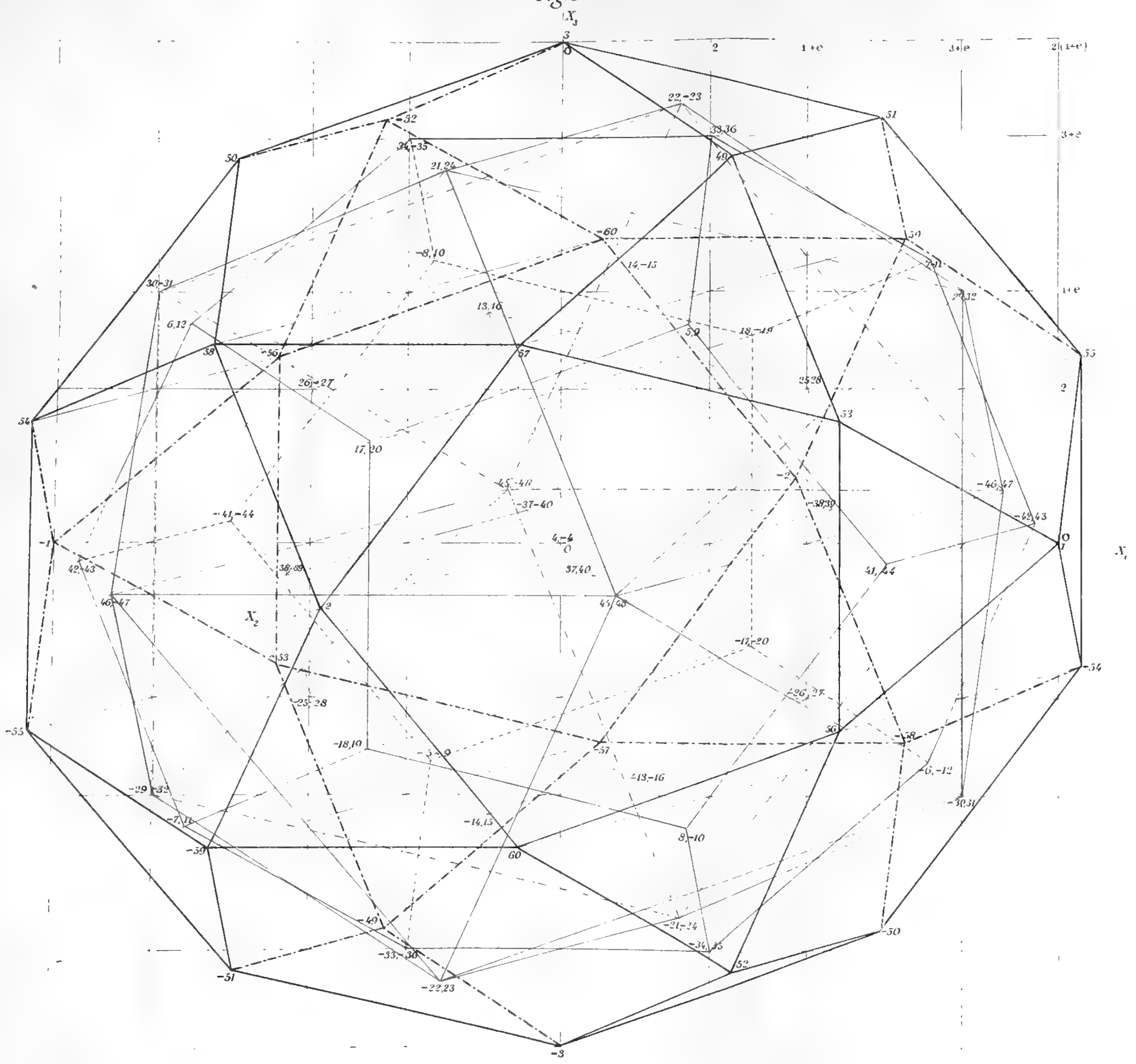


Fig. 12.

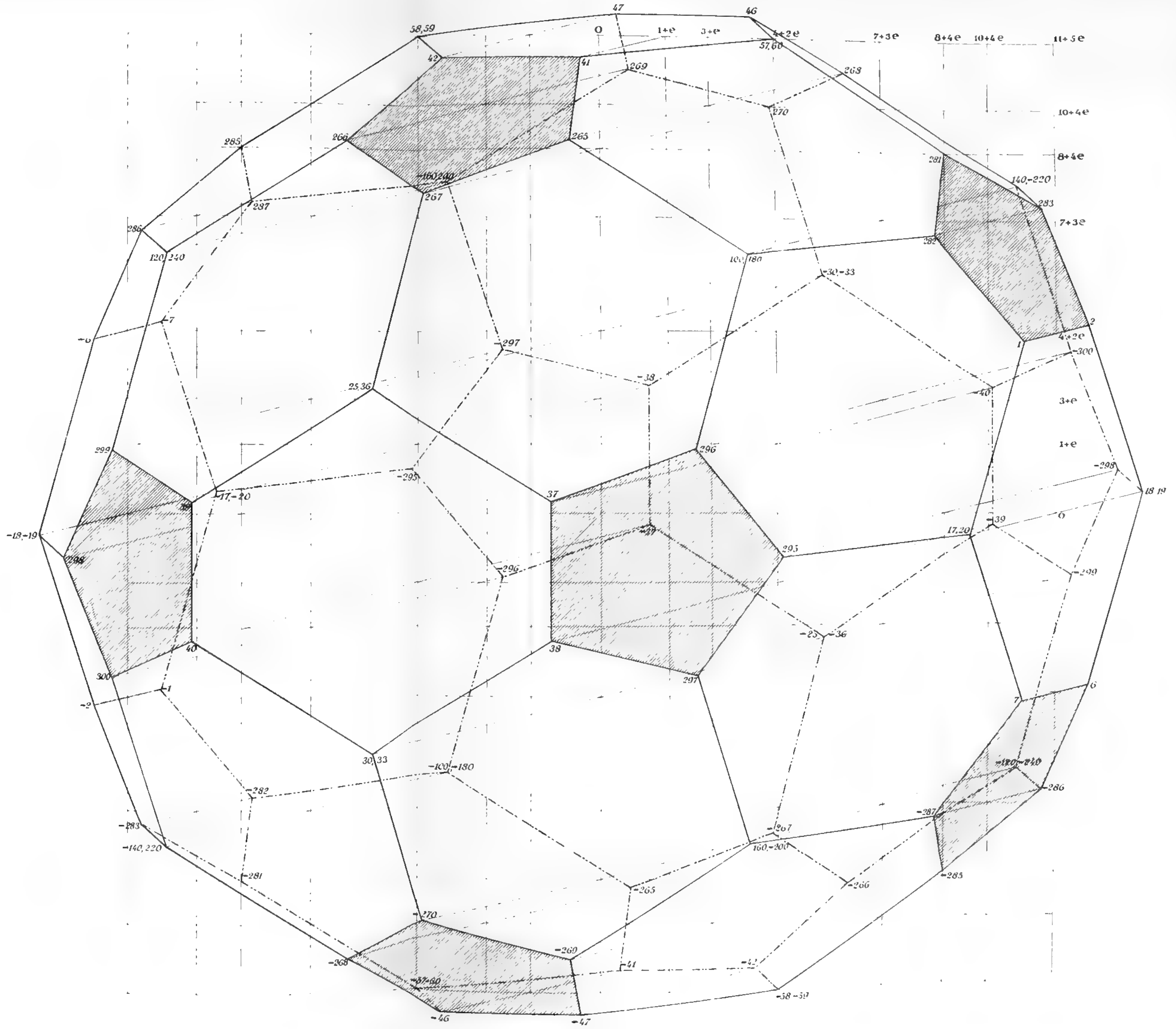


Fig. 6.

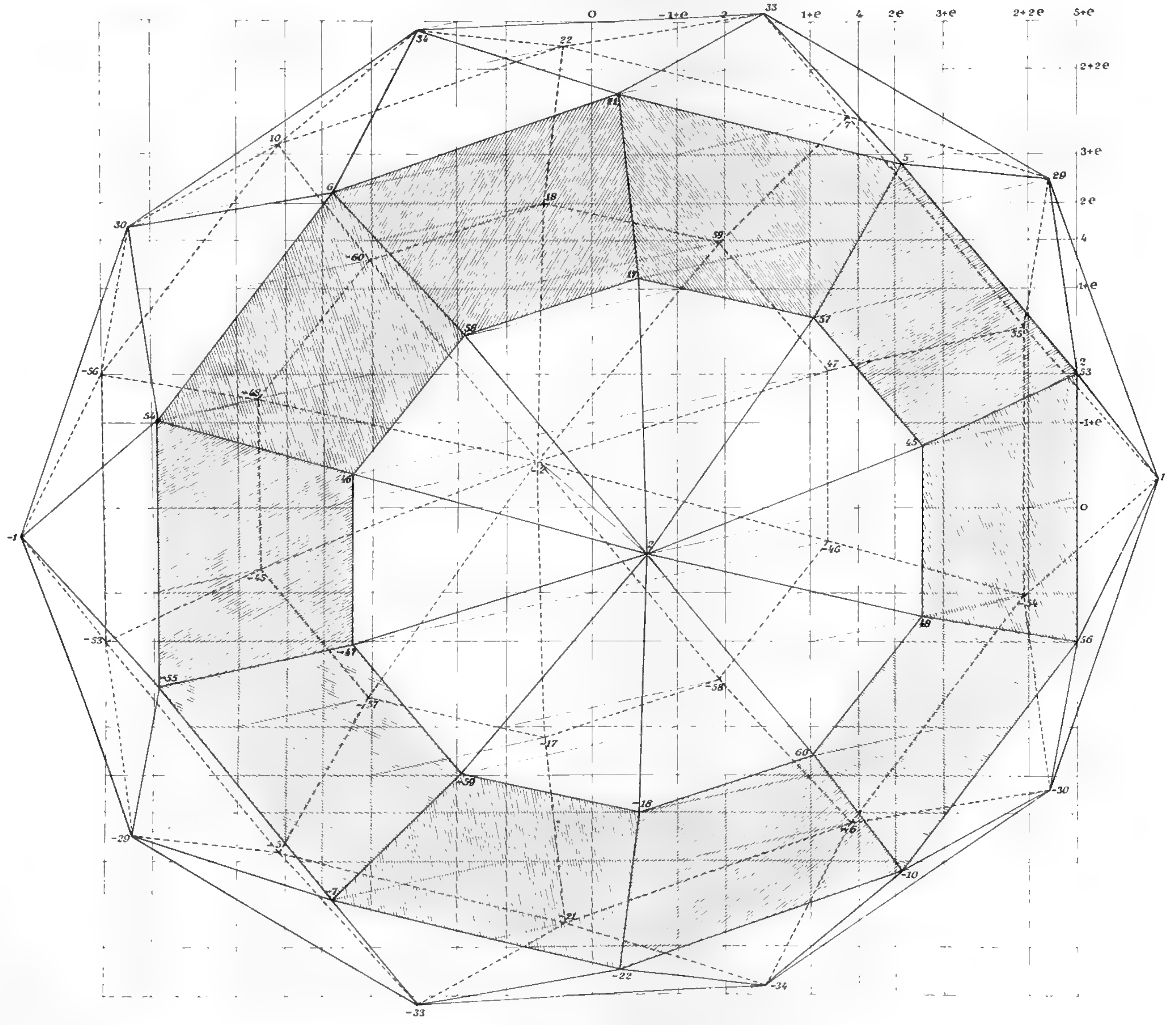


Fig. 6bis.

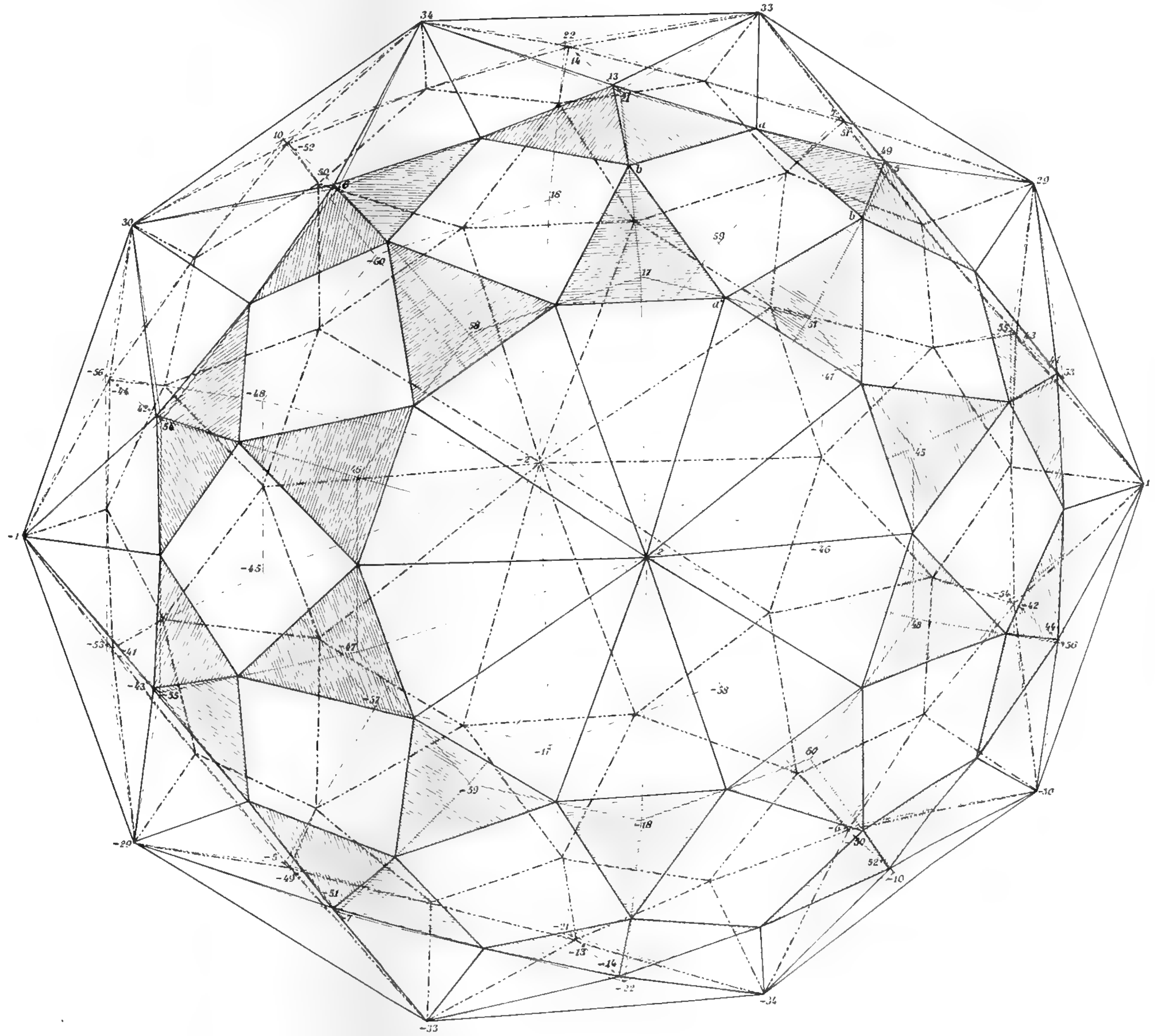


Fig. 6.

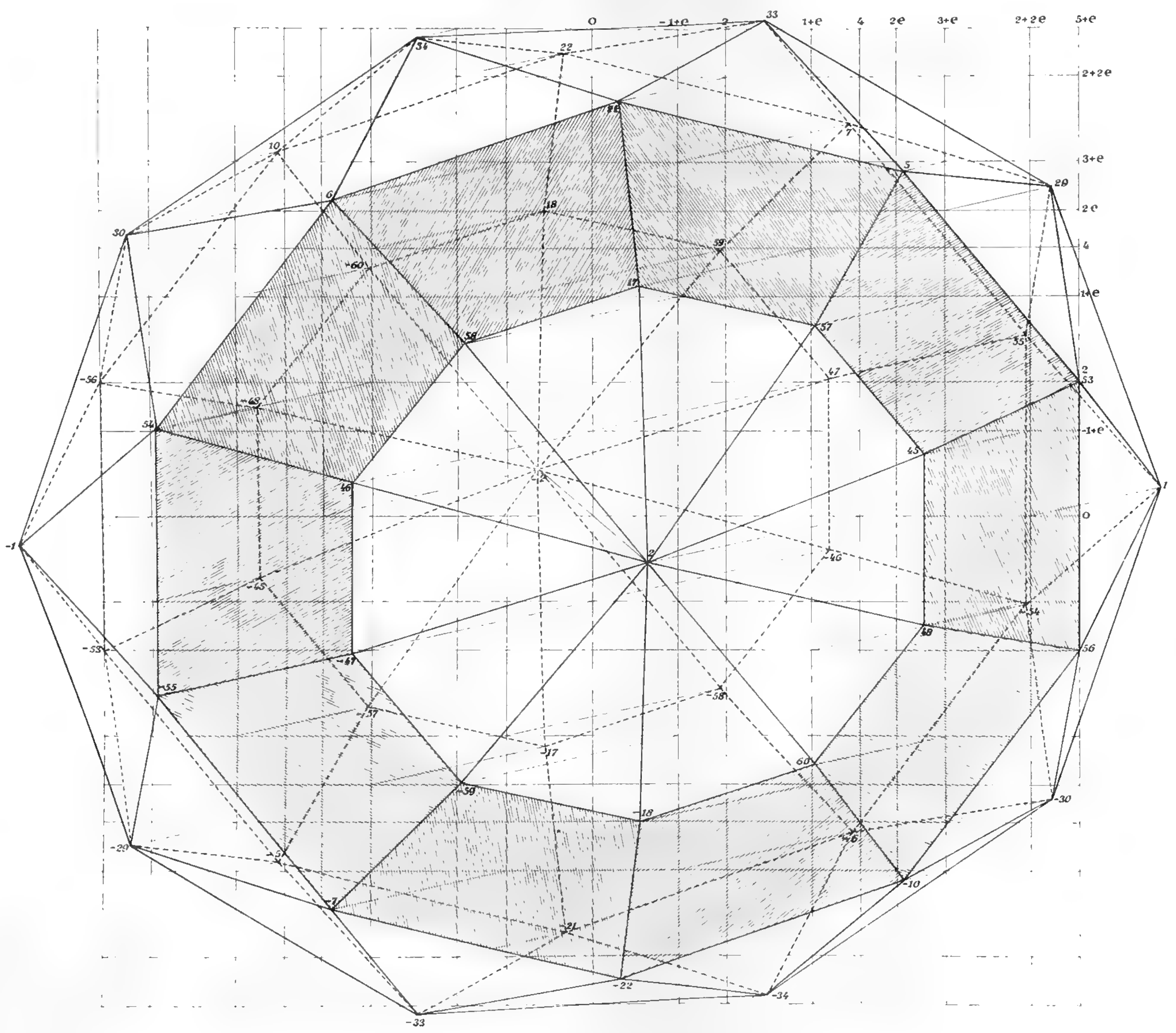


Fig. 6bis.

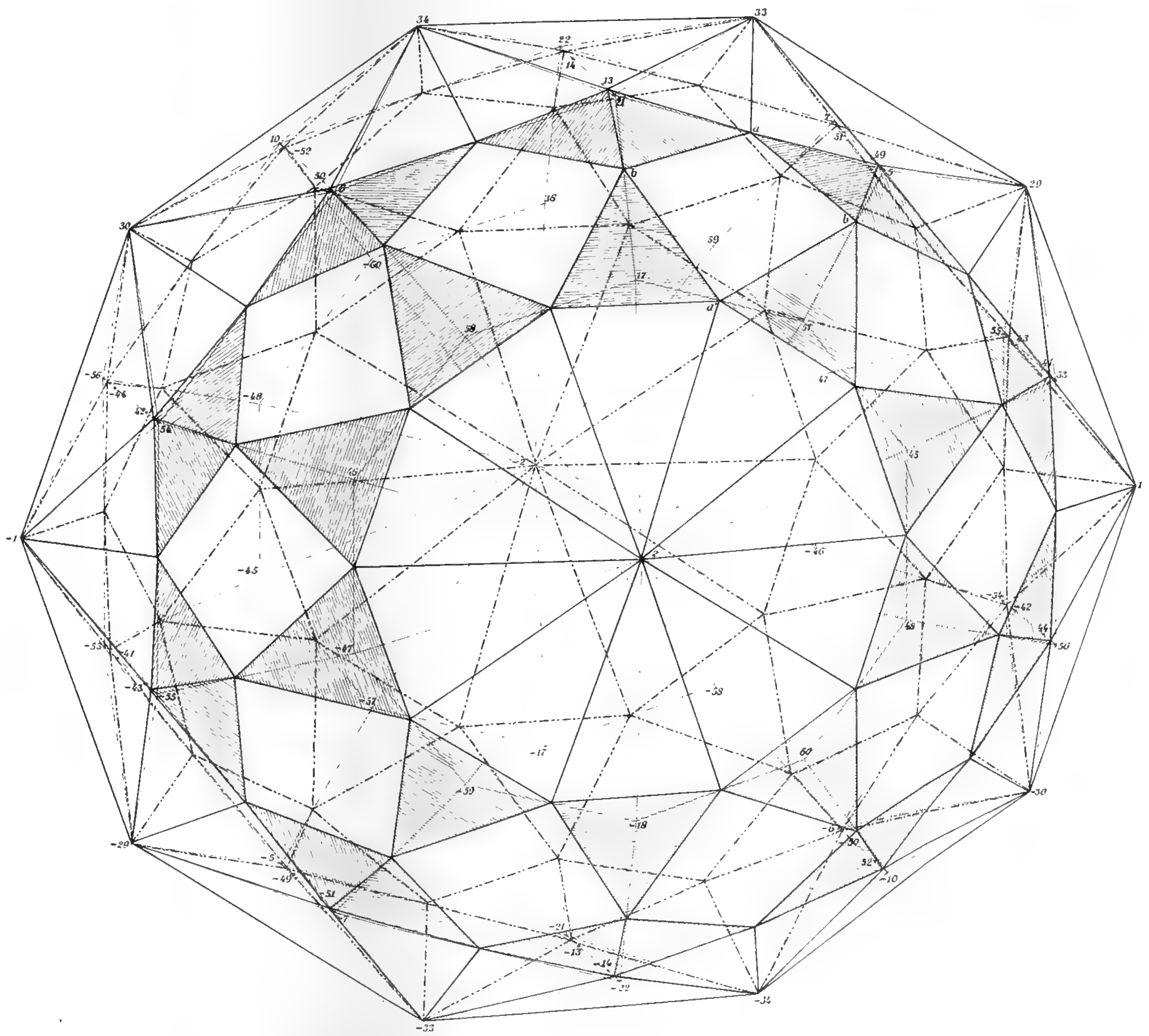


Fig. 8.

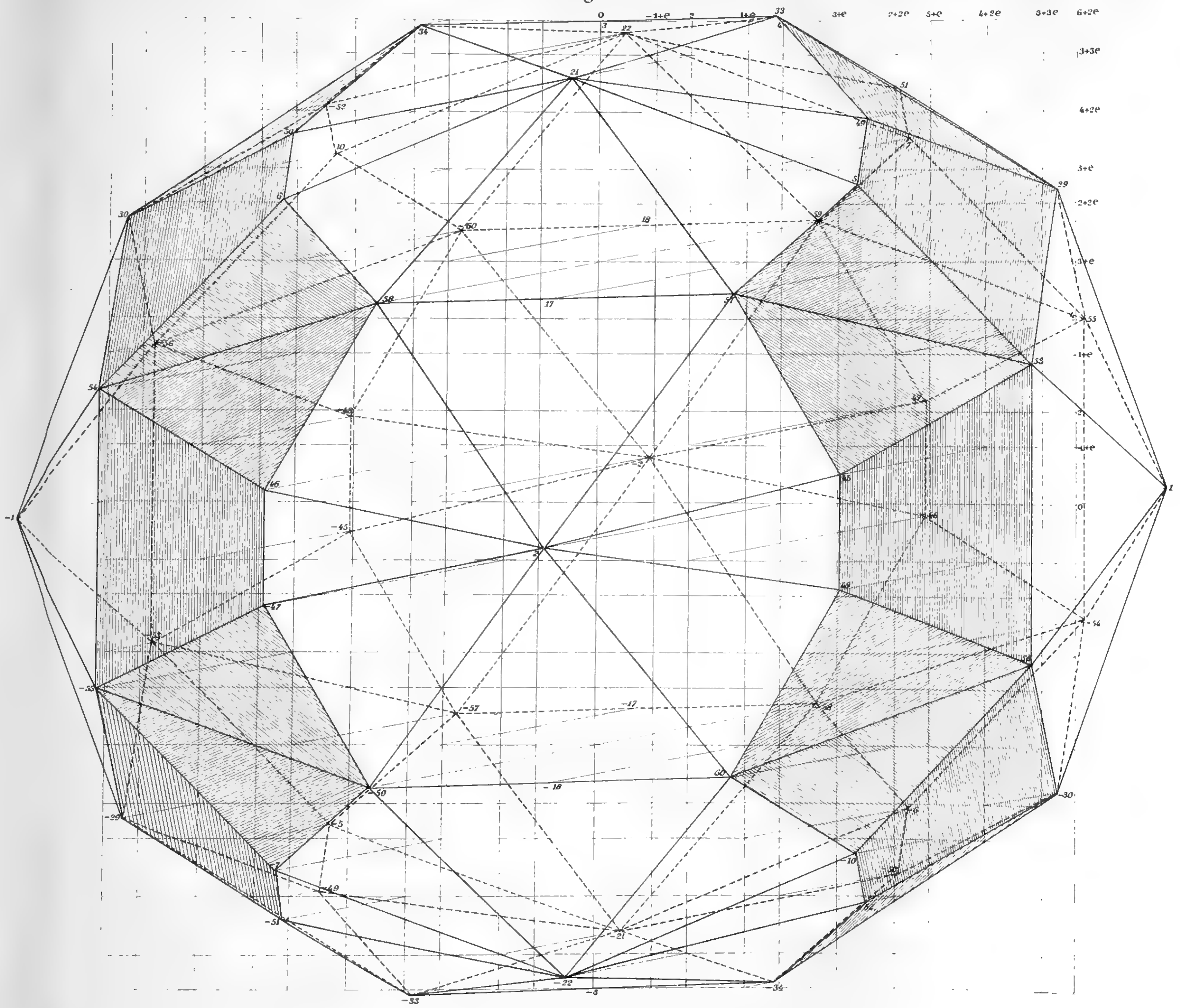


Fig. 8 bis

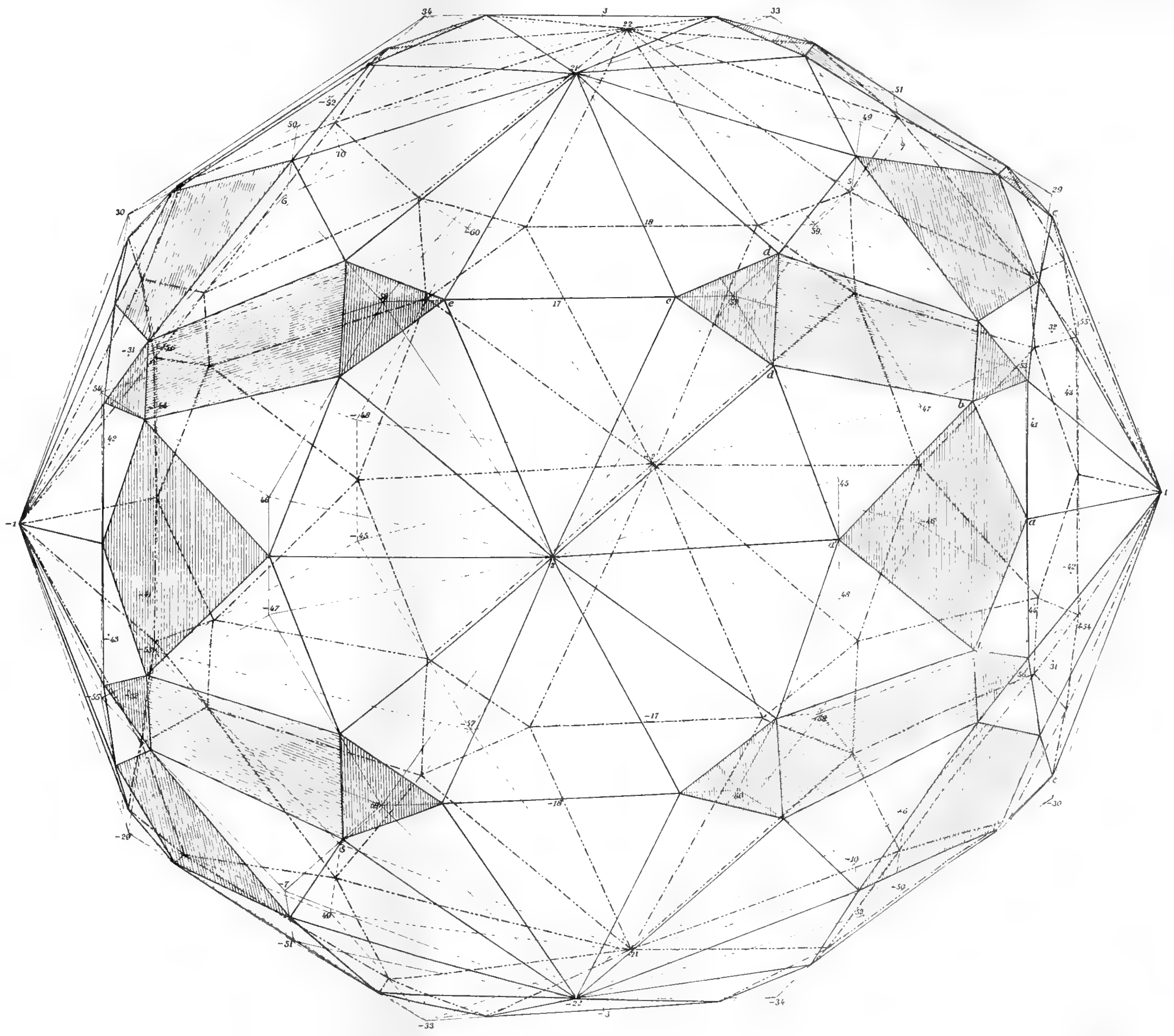


Fig. 14

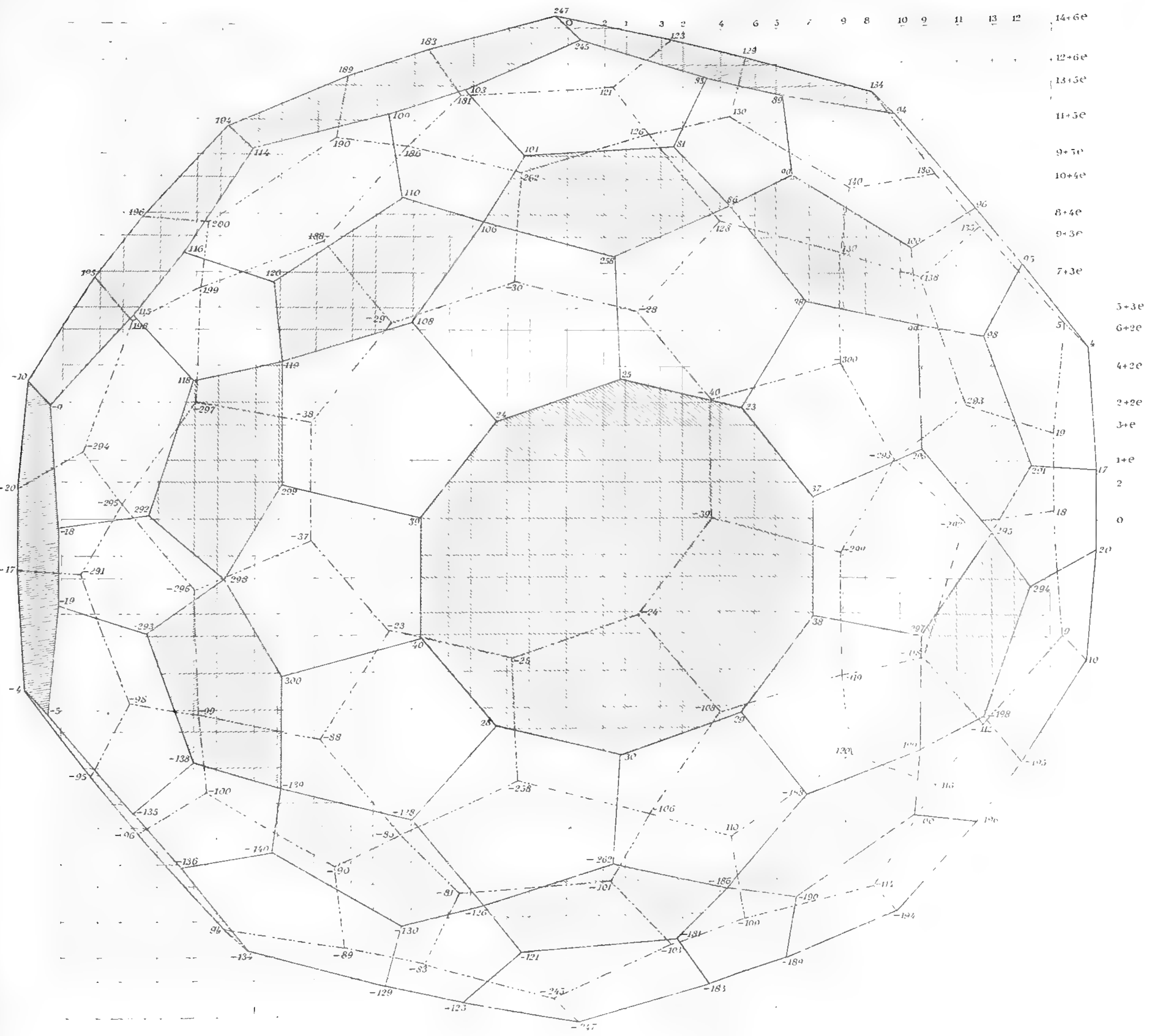


Fig. 14 bis

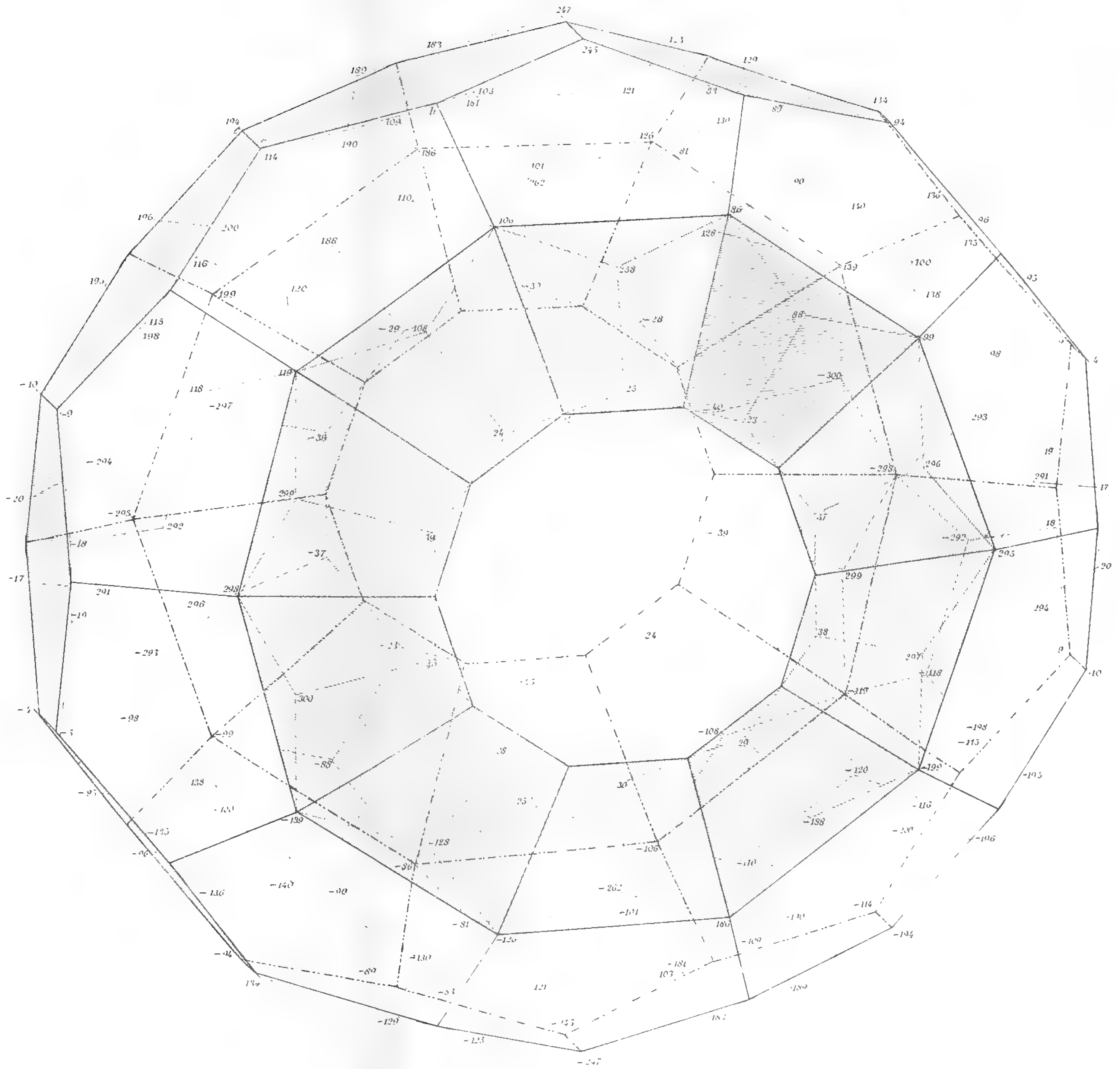


Fig. 16.

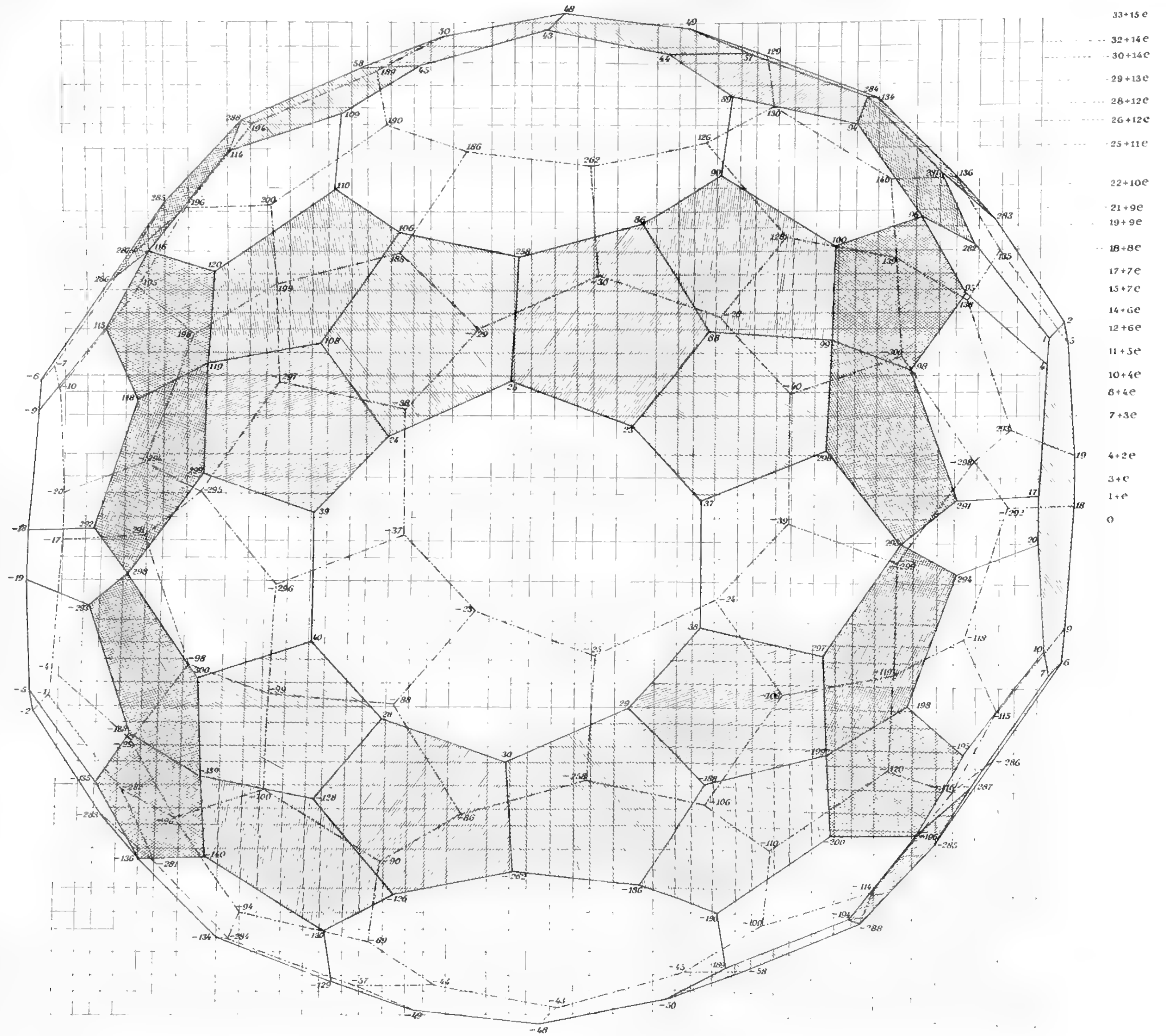


Fig. 16.^bis

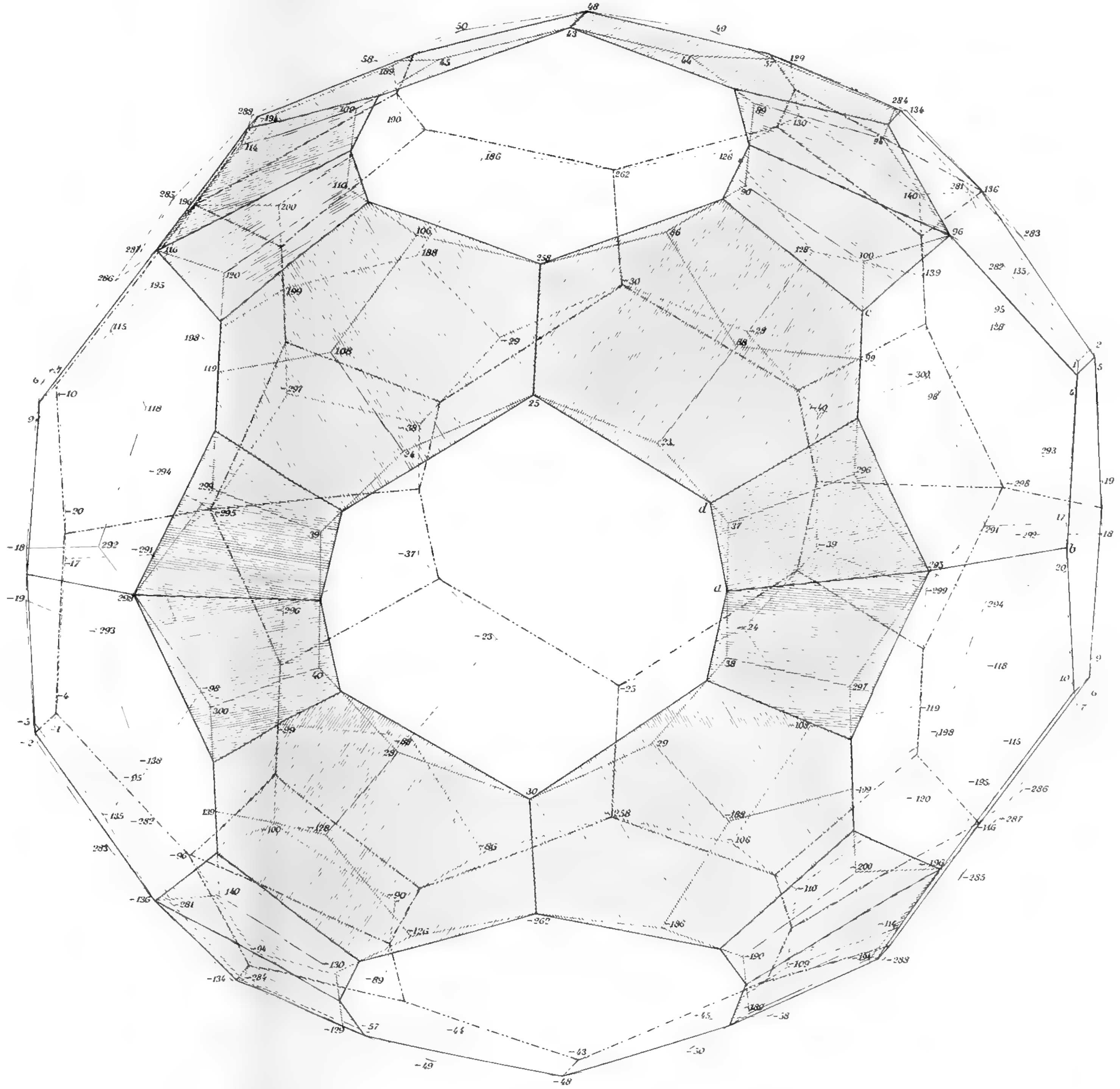


Fig. 19.

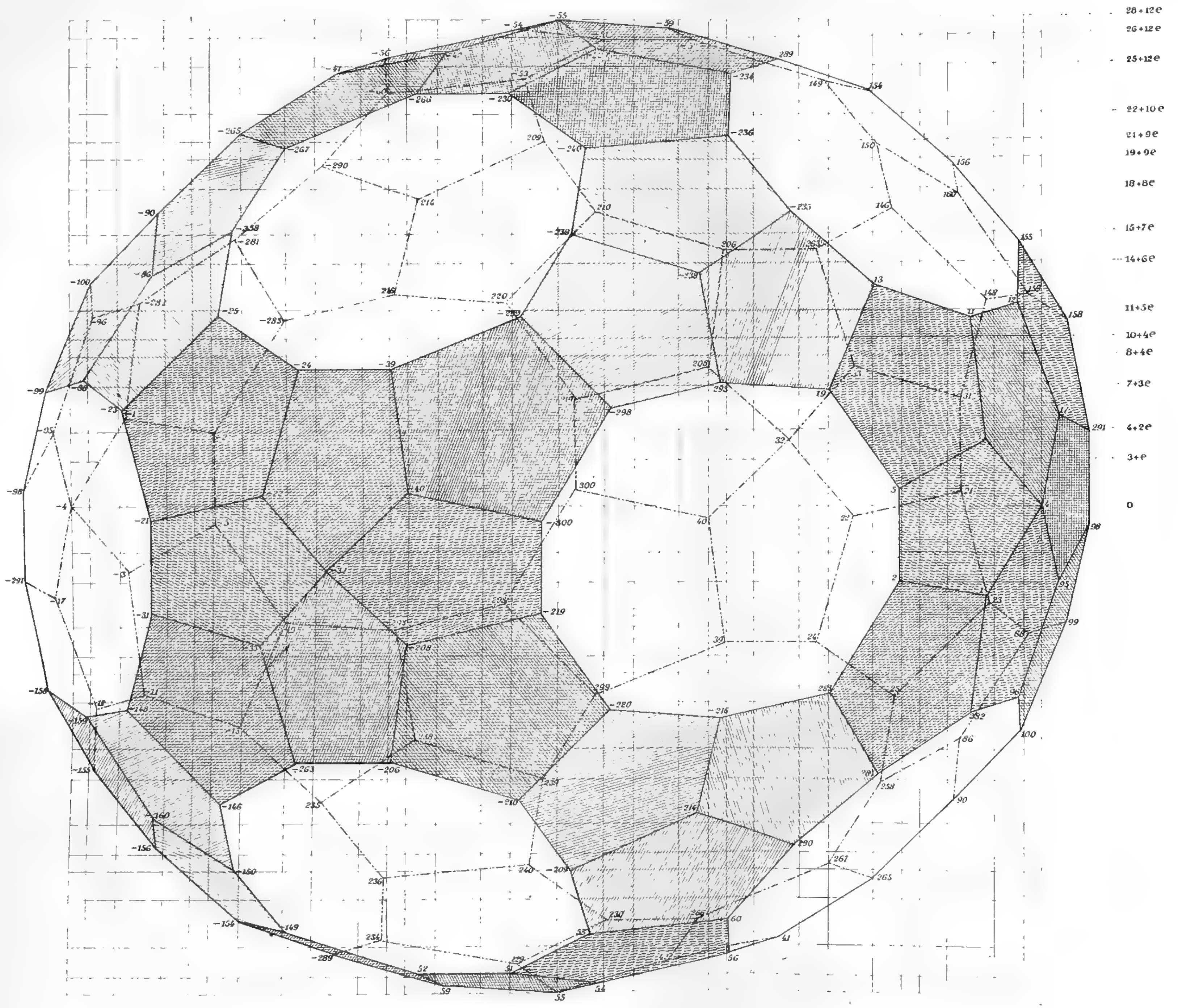
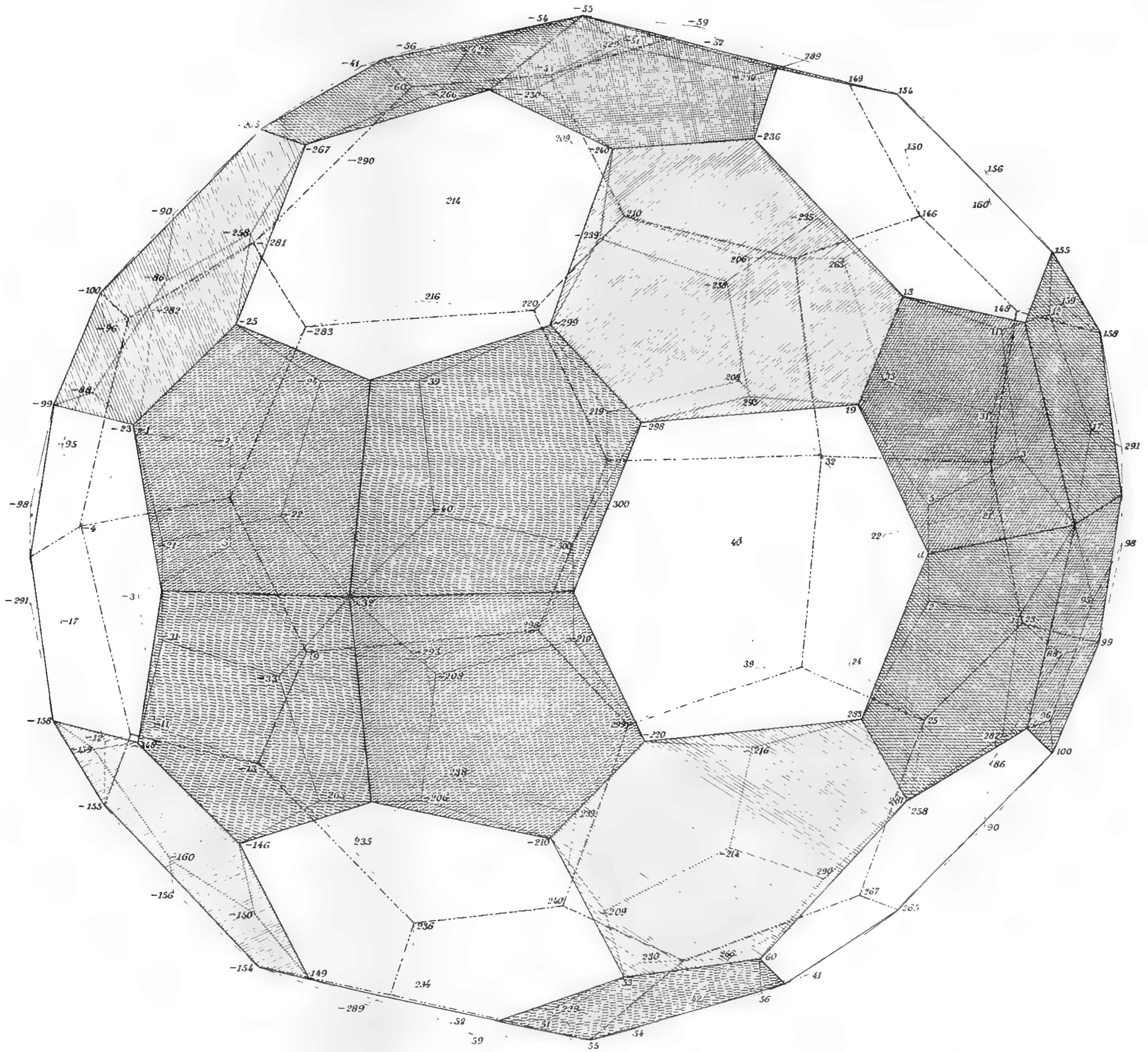


Fig. 19 bis



J.Bytel, lith. P.J.Mulder impr. Leiden

TABELLE I. Coordinatenstellung des Z^{600}.

	A. Zelldiagonale.				B. Erste Querlinie.				C. Zweite Querlinie.				D. Dritte Querlinie.				
	EINHEIT $= \frac{1}{4}a$				EINHEIT $= \frac{1}{40}a\sqrt{10(5+e)}$				EINHEIT $= \frac{1}{12}a\sqrt{3}$.				EINHEIT $= \frac{1}{16}(e-1)a\sqrt{2}$.				
	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4	z_1	z_2	z_3	z_4	w_1	w_2	w_3	w_4	
1	2(1+e)	0	0	0	2(1+e)	−4	0	0	2(3+e)	−4	0	0	7+3e	1+e	1+e	1+e	1
2	0	2(1+e)	0	0	4	2(1+e)	0	0	4	2(3+e)	0	0	1+e	−(7+3e)	−(1+e)	1+e	2
3	0	0	2(1+e)	0	0	0	2(1+e)	−4	0	0	2(3+e)	−4	1+e	1+e	−(7+3e)	−(1+e)	3
4	0	0	0	2(1+e)	0	0	4	2(1+e)	0	0	4	2(3+e)	1+e	−(1+e)	1+e	−(7+3e)	4
5	1+e	1+e	1+e	1+e	3+e	−1+e	3+e	−1+e	5+e	1+e	5+e	1+e	5+3e	−(3+e)	−(3+e)	−(3+e)	5
6	−(1+e)	1+e	1+e	1+e	1−e	3+e	3+e	−1+e	−(1+e)	5+e	5+e	1+e	−2	−2(2+e)	−2(2+e)	−2(2+e)	6
7	1+e	−(1+e)	1+e	1+e	−1+e	−(3+e)	3+e	−1+e	1+e	−(5+e)	5+e	1+e	2(2+e)	2(2+e)	−2	−2(2+e)	7
8	1+e	1+e	−(1+e)	1+e	3+e	−1+e	1−e	3+e	5+e	1+e	−(1+e)	5+e	2(2+e)	−2(2+e)	2(2+e)	−2	8
9	1+e	1+e	1+e	−(1+e)	3+e	−1+e	−1+e	−(3+e)	5+e	1+e	1+e	−(5+e)	2(2+e)	−2	−2(2+e)	2(2+e)	9
10	−(1+e)	−(1+e)	1+e	1+e	−(3+e)	1−e	3+e	−1+e	−(5+e)	−(1+e)	5+e	1+e	−(3+e)	3+e	−(3+e)	−(5+3e)	10
11	−(1+e)	1+e	−(1+e)	1+e	1−e	3+e	1−e	3+e	−(1+e)	5+e	−(1+e)	5+e	−(3+e)	−(5+3e)	3+e	−(3+e)	11
12	−(1+e)	1+e	1+e	−(1+e)	1−e	3+e	−1+e	−(3+e)	−(1+e)	5+e	1+e	−(5+e)	−(3+e)	−(3+e)	−(5+3e)	3+e	12
13	0	2	1+e	3+e	−1+e	2	2(1+e)	1+e	−1+e	1+e	2(2+e)	2(1+e)	3+e	−(3+e)	−(3+e)	−(5+3e)	13
14	0	−2	1+e	3+e	1−e	−2	2(1+e)	1+e	1−e	−(1+e)	2(2+e)	2(1+e)	1+e	1+e	−(1+e)	−(7+3e)	14
15	0	2	−(1+e)	3+e	−1+e	2	0	5+e	−1+e	1+e	−2	2(3+e)	2	−2(2+e)	2(2+e)	−2(2+e)	15
16	0	2	1+e	−(3+e)	−1+e	2	0	−(5+e)	−1+e	1+e	2	−2(3+e)	0	0	−2(3+e)	2(3+e)	16
17	0	3+e	2	1+e	1+e	3+e	4	2	1+e	2(2+e)	3+e	4	3+e	−(5+3e)	−(3+e)	−(3+e)	17
18	0	−(3+e)	2	1+e	−(1+e)	−(3+e)	4	2	−(1+e)	−2(2+e)	3+e	4	0	2(3+e)	0	−2(3+e)	18
19	0	3+e	−2	1+e	1+e	3+e	0	2e	1+e	2(2+e)	1−e	2(1+e)	1+e	−(7+3e)	1+e	−(1+e)	19
20	0	3+e	2	−(1+e)	1+e	3+e	0	−2e	1+e	2(2+e)	−1+e	−2(1+e)	2	−2(2+e)	−2(2+e)	2(2+e)	20
21	0	1+e	3+e	2	2	1+e	2(1+e)	1−e	2	3+e	3(1+e)	0	3+e	−(3+e)	−(5+3e)	−(3+e)	21
22	0	−(1+e)	3+e	2	−2	−(1+e)	2(1+e)	1−e	−2	−(3+e)	3(1+e)	0	2	2(2+e)	−2(2+e)	−2(2+e)	22
23	0	1+e	−(3+e)	2	2	1+e	−4	3+e	2	3+e	−(5+e)	2(1+e)	0	−2(3+e)	2(3+e)	0	23
24	0	1+e	3+e	−2	2	1+e	4	−(3+e)	2	3+e	5+e	−2(1+e)	1+e	−(1+e)	−(7+3e)	1+e	24
25	1+e	0	2	3+e	1+e	−2	3+e	4	3+e	−2	2(1+e)	5+e	2(3+e)	0	0	−2(3+e)	25
26	−(1+e)	0	2	3+e	−(1+e)	2	3+e	4	−(3+e)	2	2(1+e)	5+e	−(1+e)	−(1+e)	−(1+e)	−(7+3e)	26
27	1+e	0	−2	3+e	1+e	−2	−1+e	2(1+e)	3+e	−2	0	3(1+e)	2(2+e)	2	2(2+e)	−2(2+e)	27
28	1+e	0	2	−(3+e)	1+e	−2	1−e	−2(1+e)	3+e	−2	0	−3(1+e)	3+e	3+e	−(3+e)	5+3e	28
29	3+e	0	1+e	2	3+e	−(1+e)	2e	0	2(2+e)	−(1+e)	2(1+e)	−1+e	7+3e	1+e	−(1+e)	−(1+e)	29
30	−(3+e)	0	1+e	2	−(3+e)	1+e	2e	0	−2(2+e)	1+e	2(1+e)	−1+e	−2(2+e)	−2	−2(2+e)	−2(2+e)	30
31	3+e	0	−(1+e)	2	3+e	−(1+e)	−2	4	2(2+e)	−(1+e)	−4	3+e	2(3+e)	0	2(3+e)	0	31
32	3+e	0	1+e	−2	3+e	−(1+e)	2	−4	2(2+e)	−(1+e)	4	−(3+e)	5+3e	3+e	−(3+e)	3+e	32
33	2	0	3+e	1+e	2	1−e	5+e	0	1+e	1−e	2(3+e)	2	2(2+e)	2	−2(2+e)	−2(2+e)	33
34	−2	0	3+e	1+e	−2	−1+e	5+e	0	−(1+e)	−1+e	2(3+e)	2	0	0	−2(3+e)	−2(3+e)	34
35	2	0	−(3+e)	1+e	2	1−e	−(1+e)	2(1+e)	1+e	1−e	−2(1+e)	2(2+e)	1+e	−(1+e)	7+3e	−(1+e)	35
36	2	0	3+e	−(1+e)	2	1−e	1+e	−2(1+e)	1+e	1−e	2(1+e)	−2(2+e)	3+e	3+e	−(5+3e)	3+e	36
37	2	1+e	0	3+e	4	2	1+e	3+e	3+e	4	1+e	2(2+e)	2(2+e)	−2(2+e)	2	−2(2+e)	37
38	−2	1+e	0	3+e	0	2e	1+e	3+e	1−e	2(1+e)	1+e	2(2+e)	0	−2(3+e)	0	−2(3+e)	38
39	2	−(1+e)	0	3+e	0	−2e	1+e	3+e	−1+e	−2(1+e)	1+e	2(2+e)	3+e	3+e	3+e	−(5+3e)	39
40	2	1+e	0	−(3+e)	4	2	−(1+e)	−(3+e)	3+e	4	−(1+e)	−2(2+e)	1+e	−(1+e)	−(1+e)	7+3e	40
41	3+e	2	0	1+e	2(1+e)	1−e	2	1+e	3(1+e)	0	2	3+e	7+3e	−(1+e)	1+e	−(1+e)	41
42	−(3+e)	2	0	1+e	−4	3+e	2	1+e	−(5+e)	2(1+e)	2	3+e	−2(2+e)	−2(2+e)	−2	−2(2+e)	42
43	3+e	−2	0	1+e	4	−(3+e)	2	1+e	5+e	−2(1+e)	2	3+e	5+3e	3+e	3+e	−(3+e)	43
44	3+e	2	0	−(1+e)	2(1+e)	1−e	−2	−(1+e)	3(1+e)	0	−2	−(3+e)	2(3+e)	0	0	2(3+e)	44
45	1+e	3+e	0	2	2(1+e)	1+e	−1+e	2	2(2+e)	2(1+e)	−1+e	1+e	2(3+e)	−2(3+e)	0	0	45
46	−(1+e)	3+e	0	2	0	5+e	−1+e	2	−2	2(3+e)	−1+e	1+e	−(1+e)	−(7+3e)	−(1+e)	−(1+e)	46
47	1+e	−(3+e)	0	2	0	−(5+e)	−1+e	2	2	−2(3+e)	−1+e	1+e	3+e	5+3e	3+e	−(3+e)	47
48	1+e	3+e	0	−2	2(1+e)	1+e	1−e	−2	2(2+e)	2(1+e)	1−e	−(1+e)	2(2+e)	−2(2+e)	−2	2(2+e)	48
49	1+e	2	3+e	0	2e	0	3+e	−(1+e)	2(1+e)	−1+e	2(2+e)	−(1+e)	2(3+e)	0	−2(3+e)	0	49
50	−(1+e)	2	3+e	0	−2	4	3+e	−(1+e)	−4	3+e	2(2+e)	−(1+e)	−(1+e)	−(1+e)	−(7+3e)	−(1+e)	50
51	1+e	−2	3+e	0	2	−4	3+e	−(1+e)	4	−(3+e)	2(2+e)	−(1+e)	2(2+e)	2(2+e)	−2(2+e)	−2	51
52	1+e	2	−(3+e)	0	2e	0	−(3+e)	1+e	2(1+e)	−1+e	−2(2+e)	1+e	3+e	−(3+e)	5+3e	3+e	52
53	3+e	1+e	2	0	5+e	0	2	1−e	2(3+e)	2	1+e	1−e	7+3e	−(1+e)	−(1+e)	1+e	53
54	−(3+e)	1+e	2	0	−(1+e)	2(1+e)	2	1−e	−2(1+e)	2(2+e)	1+e	1−e	−2(2+e)	−2(2+e)	−2(2+e)	−2	54
55	3+e	−(1+e)	2	0	1+e	−2(1+e)	2	1−e	2(1+e)	−2(2+e)	1+e	1−e	2(3+e)	2(3+e)	0	0	55
56	3+e	1+e	−2	0	5+e	0	−2	−1+e	2(3+e)	2	−(1+e)	−1+e	5+3e	−(3+e)	3+e	3+e	56
57	2	3+e	1+e	0	3+e	4	1+e	−2	2(1+e)	5+e	3+e	−2	2(2+e)	−2(2+e)	−2(2+e)	2	57
58	−2	3+e	1+e	0	−1+e	2(1+e)	1+e	−2	0	3(1+e)	3+e	−2	0	−2(3+e)	−2(3+e)	0	58
59	2	−(3+e)	1+e	0	1−e	−2(1+e)	1+e	−2	0	−3(1+e)	3+e	−2	1+e	7+3e	−(1+e)	−(1+e)	59
60	2	3+e	−(1+e)	0	3+e	4	−(1+e)	2	2(1+e)	5+e	−(3+e)	2	3+e	−(5+3e)	3+e	3+e	60

	A. Ableitung aus den 120 Eckpunkten des Z^{600}				B. Verbindungen zu Kanten.				C. Dritte Querlinie. EINHEIT $= \frac{\text{Kante}}{2(1+e)}$				D. Zweite Querlinie. EINHEIT $= \frac{\text{Kante}}{2\sqrt{10+2e}}$				E. Erste Querlinie. EINHEIT $= \frac{\text{Kante}}{2\sqrt{21+9e}}$				F. Zelldiagonale. EINHEIT $= \frac{\text{Kante}}{4\sqrt{7+3e}}$				
1	1	29	32	53	2	4	16	282	11+5e	1+e	4+2e	0	13+5e	−(6+2e)	4+2e	−(3+e)	30+14e	−(7+3e)	11+5e	−(4+2e)	26+12e	4+2e	−(4+2e)	4+2e	1
2	„	„	„	55	1	5	15	283	11+5e	−(1+e)	4+2e	0	9+5e	−(8+4e)	4+2e	−(3+e)	28+12e	−(15+7e)	11+5e	−(4+2e)	25+11e	11+5e	−(3+e)	3+e	2
3	„	„	41	43	4	5	11	274	11+5e	0	1+e	4+2e	11+5e	−(7+3e)	4+2e	2+2e	29+13e	−(11+5e)	8+4e	10+4e	26+12e	4+2e	4+2e	−(4+2e)	3
4	„	„	„	53	1	3	17	95	11+5e	3+e	3+e	3+e	12+6e	−(4+2e)	4+2e	2	32+14e	−(4+2e)	10+4e	4+2e	28+12e	0	0	0	4
5	„	„	43	55	2	3	19	135	11+5e	−(3+e)	3+e	3+e	10+4e	−(10+4e)	4+2e	2	26+12e	−(18+8e)	10+4e	4+2e	25+11e	11+5e	3+e	−(3+e)	5
6	„	−30	31	−54	7	9	13	−286	11+5e	−(1+e)	−(4+2e)	0	9+5e	−(8+4e)	−(4+2e)	3+e	28+12e	−(15+7e)	−(11+5e)	4+2e	21+9e	7+3e	15+7e	7+3e	6
7	„	„	„	56	6	10	12	−287	11+5e	1+e	−(4+2e)	0	13+5e	−(6+2e)	−(4+2e)	3+e	30+14e	−(7+3e)	−(11+5e)	4+2e	22+10e	0	14+6e	8+4e	7
8	„	„	−42	44	9	10	14	−278	11+5e	0	−(1+e)	−(4+2e)	11+5e	−(7+3e)	−(4+2e)	−(2+2e)	29+13e	−(11+5e)	−(8+4e)	−(10+4e)	21+9e	7+3e	7+3e	15+7e	8
9	„	„	„	−54	8	6	18	−115	11+5e	−(3+e)	−(3+e)	−(3+e)	10+4e	−(10+4e)	−(4+2e)	−2	26+12e	−(18+8e)	−(10+4e)	−(4+2e)	19+9e	11+5e	11+5e	11+5e	9
10	„	„	44	55	7	8	20	−195	11+5e	3+e	−(3+e)	−(3+e)	12+6e	−(4+2e)	−(4+2e)	−2	32+14e	−(4+2e)	−(10+4e)	−(4+2e)	22+10e	0	8+4e	14+6e	10
11	„	31	41	43	3	12	13	279	11+5e	0	−(1+e)	4+2e	11+5e	−(7+3e)	2	6+2e	29+13e	−(11+5e)	0	12+6e	25+11e	3+e	11+5e	−(3+e)	11
12	„	„	„	56	7	11	17	155	11+5e	3+e	−(3+e)	3+e	12+6e	−(4+2e)	−2	4+2e	32+14e	−(4+2e)	−(4+2e)	10+4e	25+11e	−(3+e)	11+5e	3+e	12
13	„	„	43	−54	6	11	19	−235	11+5e	−(3+e)	−(3+e)	3+e	10+4e	−(10+4e)	−2	4+2e	26+12e	−(18+8e)	−(4+2e)	10+4e	22+10e	8+4e	14+6e	0	13
14	„	32	−42	44	8	15	16	280	11+5e	0	1+e	−(4+2e)	11+5e	−(7+3e)	−2	−(6+2e)	29+13e	−(11+5e)	0	−(12+6e)	22+10e	8+4e	0	14+6e	14
15	„	„	„	55	2	14	18	−215	11+5e	−(3+e)	3+e	−(3+e)	10+4e	−(10+4e)	2	−(4+2e)	26+12e	−(18+8e)	4+2e	−(10+4e)	22+10e	14+6e	0	8+4e	15
16	„	„	44	53	1	14	20	175	11+5e	3+e	3+e	−(3+e)	12+6e	−(4+2e)	2	−(4+2e)	32+14e	−(4+2e)	4+2e	−(10+4e)	25+11e	3+e	−(3+e)	11+5e	16
17	„	41	53	56	4	12	20	291	11+5e	4+2e	0	1+e	14+6e	−(3+e)	2	1+e	33+15e	0	1+e	4+2e	26+12e	−(4+2e)	4+2e	4+2e	17
18	„	−42	−54	55	9	15	19	−292	11+5e	−(4+2e)	0	−(1+e)	8+4e	−(11+5e)	−2	−(1+e)	25+11e	−(22+10e)	−(1+e)	−(4+2e)	21+9e	15+7e	7+3e	7+3e	18
19	„	43	„	„	5	13	18	293	11+5e	−(4+2e)	0	1+e	8+4e	−(11+5e)	2	1+e	25+11e	−(22+10e)	1+e	4+2e	22+10e	14+6e	8+4e	0	19
20	„	44	53	56	10	16	17	294	11+5e	4+2e	0	−(1+e)	14+6e	−(3+e)	−2	−(1+e)	33+15e	0	−(1+e)	−(4+2e)	25+11e	−(3+e)	3+e	11+5e	20
21	2	17	19	45	22	23	31	256	1+e	11+5e	0	4+2e	8+4e	9+5e	3+e	4+2e	15+7e	28+12e	4+2e	11+5e	11+5e	−(25+11e)	−(3+e)	−(3+e)	21
22	„	„	„	46	21	24	32	257	−(1+e)	11+5e	0	4+2e	6+2e	13+5e	3+e	4+2e	7+3e	30+14e	4+2e	11+5e	4+2e	−(26+12e)	−(4+2e)	−(4+2e)	22
23	„	„	45	57	21	25	37	88	3+e	11+5e	3+e	3+e	10+4e	10+4e	4+2e	2	18+8e	26+12e	10+4e	4+2e	14+6e	−(22+10e)	−(8+4e)	0	23
24	„	„	46	58	22	25	39	108	−(3+e)	(11+5e)	3+e	3+e	4+2e	12+6e	4+2e	2	4+2e	32+14e	10+4e	4+2e	3+e	−(25+11e)	−(11+5e)	−(3+e)	24
25	„	„	57	„	23	24	36	258	0	11+5e	4+2e	1+e	7+3e	11+5e	6+2e	−2	11+5e	29+13e	12+6e	0	8+4e	−(22+10e)	−(14+6e)	0	25
26	„	−18	20	−47	27	28	34	−260	−(1+e)	11+5e	0	−(4+2e)	6+2e	13+5e	−(3+e)	−(4+2e)	7+3e	30+14e	−(4+2e)	−(11+5e)	0	−(22+10e)	−(8+4e)	14+6e	26
27	„	„	„	48	26	29	35	−261	1+e	11+5e	0	−(4+2e)	8+4e	9+5e	−(3+e)	−(4+2e)	15+7e	28+12e	−(4+2e)	−(11+5e)	7+3e	−(21+9e)	−(7+3e)	15+7e	27
28	„	„	−47	−59	26	30	40	−128	−(3+e)	11+5e	−(3+e)	−(3+e)	4+2e	12+6e	−(4+2e)	−2	4+2e	32+14e	−(10+4e)	−(4+2e)	−(3+e)	−(25+11e)	−(3+e)	11+5e	28
29	„	„	48	60	27	30	38	−188	3+e	11+5e	−(3+e)	−(3+e)	10+4e	10+4e	−(4+2e)	−2	18+8e	26+12e	−(10+4e)	−(4+2e)	8+4e	−(22+10e)	0	14+6e	29
30	„	„	−59	„	28	29	33	−262	0	11+5e	−(4+2e)	−(1+e)	7+3e	11+5e	−(6+2e)	2	11+5e	29+13e	−(12+6e)	0	3+e	−(25+11e)	3+e	11+5e	30
31	„	19	45	„	21	33	38	148	3+e	11+5e	−(3+e)	3+e	10+4e	10+4e	−2	4+2e	18+8e	26+12e	−(4+2e)	10+4e	11+5e	−(25+11e)	3+e	3+e	31
32	„	„	46	−59	22	33	40	208	−(3+e)	11+5e	−(3+e)	3+e	4+2e	12+6e	−2	4+2e	4+2e	32+14e	−(4+2e)	10+4e	0	−(28+12e)	0	0	32
33	„	„	−59	60	30	31	32	263	0	11+5e	−(4+2e)	1+e	7+3e	11+5e	−(2+2e)	4+2e	11+5e	29+13e	−(10+4e)	8+4e	4+2e	−(26+12e)	4+2e	4+2e	33
34	„	20	−47	58	26	36	39	228	−(3+e)	11+5e	3+e	−(3+e)	4+2e	12+6e	2	−(4+2e)	4+2e	32+14e	4+2e	−(10+4e)	0	−(22+10e)	−(14+6e)	8+4e	34
35	„	„	48	57	27	36	37	108	3+e	11+5e	3+e	−(3+e)	10+4e	10+4e	2	−(4+2e)	18+8e	26+12e	4+2e	−(10+4e)	11+5e	−(19+9e)	−(11+5e)	11+5e	35
36	„	„	57	58	25	34	35	264	0	11+5e	4+2e	−(1+e)	7+3e	11+5e	2+2e	−(4+2e)	11+5e	29+13e	10+4e	−(8+4e)	7+3e	−(21+9e)	−(15+7e)	7+3e	36
37	„	45	48	57	23	35	38	296	4+2e	11+5e	1+e	0	11+5e	8+4e	1+e	−2	22+10e	25+11e	4+2e	−(1+e)	15+7e	−(21+9e)	−(7+3e)	7+3e	37
38	„	„	„	60	29	31	37	297	4+2e	11+5e	−(1+e)	0	11+5e	8+4e	−(1+e)	2	22+10e	25+11e	−(4+2e)	1+e	14+6e	−(22+10e)	0	8+1e	38
39	„	46	−47	58	24	34	40	299	−(4+2e)	11+5e	1+e	0	3+e	14+6e	1+e	−2	0	33+15e	4+2e	−(1+e)	−(3+e)	−(25+11e)	−(11+5e)	3+e	39
40	„	„	„	−59	28	32	39	300	−(4+2e)	11+5e	−(1+e)	0	3+e	14+6e	−(1+e)	2	0	33+15e	−(4+2e)	1+e	−(4+2e)	−(26+12e)	−(4+2e)	4+2e	40
41	3	21	24	49	42	44	56	265	1+e	4+2e	11+5e	0	4+2e	2+2e	11+5e	−(7+3e)	8+4e	10+4e	29+13e	−(11+5e)	11+5e	−(3+e)	−(25+11e)	−(3+e)	41
42	„	„	„	50	41	45	55	266	−(1+e)	4+2e	11+5e	0	2	6+2e	11+5e	−(7+3e)	0	12+6e	29+13e	−(11+5e)	4+2e	−(4+2e)	−(26+12e)	−(4+2e)	42
43	„	„	33	34	44	45	48	245	0	1+e	11+5e	4+2e	2	1+e	14+6e	−(3+e)	1+e	4+2e	33+15e	0	8+4e	0	−(22+10e)	−(14+6e)	43
44	„	„	„	49	41	43	57	89	3+e	3+e	11+5e	3+e	4+2e	2	12+6e	−(4+2e)	10+4e	4+2e	32+14e	−(4+2e)	14+6e	0	−(22+10e)	−(8+4e)	44
45	„	„	34	50	42	43	58	109	−(3+e)	3+e	11+5e	3+e	−2	4+2e	12+6e	−(4+2e)	−(4+2e)	10+4e	32+14e	−(4+2e)	3+e	−(3+e)	−(25+11e)	−(11+5e)	45
46	„	22	−23	51	47	49	53	268	1+e	−(4+2e)	11+5e	0	−2	−(6+2e)	11+5e	−(7+3e)	0	−(12+6e)	29+13e	−(11+5e)	7+3e	15+7e	−(21+9e)	−(7+3e)	46
47	„	„	„	−52	46	50	52	269	−(1+e)	−(4+2e)	11+5e	0	−(4+2e)	−(2+2e)	11+5e	−(7+3e)	−(8+4e)	−(10+4e)	29+13e	−(11+5e)	0	14+6e	−(22+10e)	−(8+4e)	47
48	„	„	33	34	43	49	50	247	0	−(1+e)	11+5e	4+2e	−2	−(1+e)	14+6e	−(3+e)	−(1+e)	−(4+2e)	33+15e	0	7+3e	7+3e	−(21+9e)	−(15+7e)	48
49	„	„	„	51	46	48	57	129	3+e	−(3+e)	11+5e	3+e	2	−(4+2e)	12+6e	−(4+2e)	4+2e	−(10+4e)	32+14e	−(4+2e)	11+5e	11+5e	−(19+9e)	−(11+5e)	49
50	„	„	34	−52	47	48	58	189	−(3+e)	−(3+e)	11+5e	3+e	−(4+2e)	−2	12+6e	−(4+2e)	−(10+4e)	−(4+2e)	32+14e	−(4+2e)	0	8+4e	−(22+10e)	−(14+6e)	50
51	„	−23	−35	36	52	53	54	−252	0	−(1+e)	11+5e	−(4+2e)	−2	−(1+e)	8+4e	−(11+5e)	−(1+e)	−(4+2e)	25+11e	−(22+10e)	3+e	11+5e	−(25+11e)	3+e	51
52	„	„	„	−52	47	51	59	−149	−(3+e)	−(3+e)	11+5e	−(3+e)	−(4+2e)	−2	10+4e	−(10+4e)	−(10+4e)	−(4+2e)	26+12e	−(18+8e)	−(3+e)	11+5e	−(25+11e)	−(3+e)	52
53	„	„	36	51	46	51	60	−209	3+e	−(3+e)	11+5e	−(3+e)	2	−(4+2e)	10+4e	−(10+4e)	4+2e	−(10+4e)	26+12e	− 18+8e)	8+4e	14+6e	−(22+10e)	0	53
54	„	24	−35	36	51	55	56	254	0	1+e	11+5e	−(4+2e)	2	1+e	8+4e	−(11+5e)	1+e	4+2e	25+11e	−(22+10e)	4+2e	4+2e	−(26+12e)	4+2e	54
55	„	„	„	50	42	54	59	229	−(3+e)	3+e	11+5e	−(3+e)	−2	4+2e	10+4e	−(10+4e)	−(4+2e)	10+4e	26+12e	−(18+8e)	0	0	−(28+12e)	0	55
56	„	„	36	49	41	54	60	169	3+e	3+e	11+5e	−(3+e)	4+2e	2	10+4e	−(10+4e)	10+4e	4+2e	26+12e	−(18+8e)	11+5e	3+e	−(25+11e)	3+e	56
57	„	33	49	51	44	49	60	284	4+2e	0	11+5e	1+e	4+2e	−(3+e)	13+5e	−(6+2e)	11+5e	−(4+2e)	30+14e	−(7+3e)	15+7e	7+3e	−(21+9e)	−(7+3e)	57
58	„	34	50	−52	45	50	59	288	−(4+2e)	0	11+5e	1+e	−(4+2e)	3+e	13+5e	−(6+2e)	−(11+5e)	4+2e	30+14e	−(7+3e)	−(3+e)	3+e	−(25+11e)	−(11+5e)	58
59	„	−35	„	„	52	55	58	−289	−(4+2e)	0	11+5e	−(1+e)	−(4+2e)	3+e	9+5e	−(8+4e)	−(11+5e)	4+2e	28+12e	−(15+7e)	−(4+2e)	4+2e	−(26+12e)	−(4+2e)	59
60	„	36	49	51	53	56	57	290	4+2e	0	11+5e	−(1+e)	4+2e	−(3+e)	9+5e	−(8+4e)	11+5e	−(4+2e)	28+12e	−(15+7e)	14+6e	8+4e	−(22+10e)	0	60
61	4	13	14	25	62	63	66	241	1+e	0	4+2e	11+5e	1+e	−2	11+5e	8+4e	4+2e	−(1+e)	22+10e	25+11e	11+5e	−(3+e)	−(3+e)	−(25+11e)	61
62	„	„	„	26	61	64	67	242	−(1+e)	0	4+2e	11+5e	−(1+e)	2	11+5e	8+4e	−(4+2e)	1+e	22+10e	25+11e	4+2e	−(4+2e)	−(4+2e)	−(26+12e)	62
63	„	„	25	37	61	65	77	85	3+e	3+e	3+e	11+5e	4+2e	2	10+4e	10+4e	10+4e	4+2e	18+8e	26+12e	14+6e	−(8+4e)	0	−(22+10e)	63
64	„	„	26	38	62	65	79	105	−(3+e)	3+e	3+e	11+5e	−2	4+2e	10+4e	10+4e	−(4+2e)	10+4e	18+8e	26+12e	3+e	−(11+5e)	−(3+e)	−(25+11e)	64
65	„	„	37	„	63	64	73	244	0	4+2e	1+e	11+5e	3+e	4+2e	8+4e	9+5e	4+2e	11+5e	15+7e	28+12e	8+4e	−(14+6e)	0	−(22+10e)	65
66	„	14	25	39	61	68	78	125	3+e	−(3+e)	3+e	11+5e	2	−(4+2e)	10+4e	10+4e	4+2e	−(10+4e)	18+8e	26+12e	11+5e	3+e	3+e	−(25+11e)	66
67	„	„	26	−40	62	68	80	185	−(3+e)	−(3+e)	3+e	11+5e	−(4+2e)	−2	10+4e	10+4e	−(10+4e)	−(4+2e)	18+8e	26+12e	0	0	0	−(28+12e)	67
68	„	„	39	„	66	67	76	246	0	−(4+2e)	1+e	11+5e	−(3+e)	−(4+2e)	8+4e	9+5e	−(4+2e)	−(11+5e)	15+7e	28+12e	4+2e	4+2e	4+2e	−(26+12e)	68
69	„	15	−16	27	70	71	74	248	1+e	0	−(4+2e)	11+5e	1+e	−2	3+e	14+6e	4+2e	−(1+e)	0	33+15e	7+3e	−(7+3e)	15+7e	−(21+9e)	69
70	„	„	„	−28	69	72	75	249	−(1+e)	0	−(4+2e)	11+5e	−(1+e)	2	3+e	14+6e	−(4+2e)	1+e	0	33+15e	0	−(8+4e)	14+6e	−(22+10e)	70
71	„	„	27	37	69	73	77	145	3+e	3+e	−(3+e)	11+5e	4+2e	2	4+2e	12+6e	10+4e	4+2e	4+2e	32+14e	11+5e	−(11+5e)	11+5e	−(19+9e)	71
72	„	„	−28	38	70	73	79	205	−(3+e)	3+e	−(3+e)	11+5e	−2	−(4+2e)	4+2e	12+6e	−(4+2e)	10+4e	4+2e	32+14e	0	−(14+6e)	8+4e	−(22+10e)	72
73	„	„	37	„	65	71	72	251	0	4+2e	−(1+e)	11+5e	3+e	4+2e	6+2e	13+5e	4+2e	11+5e	7+3e	30+14e	7+3e	−(15+7e)	7+3e	−(21+9e)	73
74	„	−16	27	39	69	76	78	−225	3+e	−(3+e)	−(3+e)	11+5e	2	−(4+2e)	4+2e	12+6e	4+2e	−(10+4e)	4+2e	32+14e	8+4e	0	14+6e	−(22+10e)	74
75	„	„	−28	−40	70	76	80	−165	−(3+e)	−(3+e)	−(3+e)	11+5e	−(4+2e)	−2	4+2e	12+6e	−(10+4e)	−(4+2e)	4+2e	32+14e	−(3+e)	−(3+e)	11+5e	−(25+11e)	75

	A. Ableitung aus den 120 Eckpunkten des Z^{600}				B. Verbindungen zu Kanten.				C. Dritte Querlinie. EINHEIT $= \frac{\text{Kante}}{2(1+e)}$				D. Zweite Querlinie. EINHEIT $= \frac{\text{Kante}}{2\sqrt{10+2e}}$				E. Erste Querlinie. EINHEIT $= \frac{\text{Kante}}{2\sqrt{21+9e}}$				F. Zelldiagonale. EINHEIT $= \frac{\text{Kante}}{\sqrt{7+3e}}$				
76	4	−16	39	−40	68	74	75	−253	0	−(4+2e)	−(1+e)	11+5e	−(3+e)	−(4+2e)	6+2e	13+5e	−(4+2e)	−(11+5e)	7+3e	30+14e	3+e	3+e	11+5e	−(25+11e)	76
77	″	25	27	37	63	71	78	271	4+2e	1+e	0	11+5e	6+2e	−2	7+3e	11+5e	12+6e	0	11+5e	29+13e	15+7e	−(7+3e)	7+3e	−(21+9e)	77
78	″	″	″	39	66	74	77	272	4+2e	−(1+e)	0	11+5e	2+2e	−(4+2e)	7+3e	11+5e	10+4e	−(8+4e)	11+5e	29+13e	14+6e	0	8+4e	−(22+10e)	78
79	″	26	−28	38	64	72	80	275	−(4+2e)	1+e	0	11+5e	−(2+2e)	4+2e	7+3e	11+5e	−(10+4e)	8+4e	11+5e	29+13e	−(3+e)	−(11+5e)	3+e	−(25+11e)	79
80	″	″	″	−40	67	75	79	276	−(4+2e)	−(1+e)	0	11+5e	−(6+2e)	2	7+3e	11+5e	−(12+6e)	0	11+5e	29+13e	−(4+2e)	−(4+2e)	4+2e	−(26+12e)	80
81	5	18	17	21	82	83	86	101	1+e	7+3e	7+3e	7+3e	5+3e	5+3e	11+5e	3+e	11+5e	17+7e	25+11e	11+5e	14+6e	−(14+6e)	−(14+6e)	−(14+6e)	81
82	″	″	″	37	81	85	87	244	3+e	7+3e	4+2e	8+4e	7+3e	6+2e	10+4e	5+3e	14+6e	15+7e	19+9e	18+8e	15+7e	−(15+7e)	−(7+3e)	−(15+7e)	82
83	″	″	21	33	81	84	89	245	3+e	4+2e	8+4e	7+3e	6+2e	3+e	12+6e	1+e	11+5e	8+4e	29+13e	10+4e	15+7e	−(7+3e)	−(15+7e)	−(15+7e)	83
84	″	″	25	″	83	85	91	241	4+2e	3+e	7+3e	8+4e	5+3e	0	13+5e	4+2e	14+6e	3+e	26+12e	15+7e	18+8e	−(4+2e)	−(10+4e)	−(18+8e)	84
85	″	″	″	37	63	82	84	93	4+2e	4+2e	4+2e	10+4e	7+3e	1+e	9+5e	7+3e	15+7e	7+3e	21+9e	21+9e	18+8e	−(10+4e)	−(4+2e)	−(18+8e)	85
86	″	17	21	57	81	88	90	258	3+e	8+4e	7+3e	4+2e	9+3e	7+3e	10+4e	0	15+7e	19+9e	22+10e	4+2e	15+7e	−(15+7e)	−(15+7e)	−(7+3e)	86
87	″	″	37	45	82	88	97	256	4+2e	8+4e	3+e	7+3e	10+4e	5+3e	7+3e	6+2e	19+9e	18+8e	14+6e	15+7e	18+8e	−(18+8e)	−(4+2e)	−(10+4e)	87
88	″	″	45	57	23	86	87	99	4+2e	10+4e	4+2e	4+2e	9+5e	7+3e	7+3e	1+e	21+9e	21+9e	15+7e	7+3e	18+8e	−(18+8e)	−(10+4e)	−(4+2e)	88
89	″	21	33	49	44	83	90	94	4+2e	4+2e	10+4e	4+2e	7+3e	1+e	13+5e	−(1+e)	15+7e	7+3e	29+13e	1+e	18+8e	−(4+2e)	−(18+8e)	−(10+4e)	89
90	″	″	49	57	86	89	100	265	4+2e	7+3e	8+4e	3+e	8+4e	4+2e	9+5e	−(3+e)	18+8e	14+6e	25+11e	−(1+e)	18+8e	−(10+4e)	−(18+8e)	−(4+2e)	90
91	″	25	29	33	84	92	94	131	7+3e	1+e	7+3e	7+3e	9+3e	−(3+e)	11+5e	3+e	19+9e	−(3+e)	25+11e	11+5e	22+10e	0	−(8+4e)	−(14+6e)	91
92	″	″	″	41	91	93	96	274	8+4e	3+e	4+2e	7+3e	9+5e	−(3+e)	8+4e	4+2e	25+11e	−(1+e)	18+8e	14+6e	25+11e	−(3+e)	−(3+e)	−(11+5e)	92
93	″	″	37	″	85	92	97	271	7+3e	4+2e	3+e	8+4e	10+4e	0	9+3e	7+3e	22+10e	4+2e	15+7e	19+9e	22+10e	−(8+4e)	0	−(14+6e)	93
94	″	29	33	49	89	91	96	284	7+3e	3+e	8+4e	4+2e	8+4e	−(1+e)	11+5e	−2	21+9e	0	26+12e	3+e	22+10e	0	−(14+6e)	−(8+4e)	94
95	″	″	41	53	4	92	96	98	10+4e	4+2e	4+2e	4+2e	13+5e	−(1+e)	7+3e	1+e	29+13e	1+e	15+7e	7+3e	26+12e	−(4+2e)	−(4+2e)	−(4+2e)	95
96	″	″	49	″	94	95	100	282	8+4e	4+2e	7+3e	3+e	11+5e	−2	8+4e	−(1+e)	26+12e	3+e	21+9e	0	25+11e	−(3+e)	−(11+5e)	−(3+e)	96
97	″	37	41	45	87	93	98	157	7+3e	7+3e	1+e	7+3e	11+5e	3+e	5+3e	5+3e	25+11e	11+5e	11+5e	17+7e	22+10e	−(14+6e)	0	−(8+4e)	97
98	″	41	45	53	95	97	99	291	8+4e	7+3e	3+e	4+2e	12+6e	1+e	6+2e	3+e	29+13e	10+4e	11+5e	8+4e	25+11e	−(11+5e)	−(3+e)	−(3+e)	98
99	″	45	53	57	88	98	100	296	7+3e	8+4e	4+2e	3+e	13+5e	4+2e	5+3e	0	26+12e	15+7e	14+6e	3+e	22+10e	−(14+6e)	−(8+4e)	0	99
100	″	49	″	″	90	96	99	180	7+3e	7+3e	7+3e	1+e	11+5e	3+e	9+3e	−(3+e)	25+11e	11+5e	19+9e	−(3+e)	22+10e	−(8+4e)	−(14+6e)	0	100
101	6	13	17	21	81	102	103	106	−(1+e)	7+3e	7+3e	7+3e	3+e	9+3e	11+5e	3+e	3+e	19+9e	25+11e	11+5e	7+3e	−(15+7e)	−(15+7e)	−(15+7e)	101
102	″	″	″	38	101	105	107	244	−(3+e)	7+3e	4+2e	8+4e	1+e	8+4e	10+4e	5+3e	0	21+9e	19+9e	18+8e	4+2e	−(18+8e)	−(10+4e)	−(18+8e)	102
103	″	″	21	34	101	104	109	245	−(3+e)	4+2e	8+4e	7+3e	0	5+3e	12+6e	1+e	−(3+e)	14+6e	29+13e	10+4e	4+2e	−(10+4e)	−(18+8e)	−(18+8e)	103
104	″	″	26	″	103	105	111	242	−(4+2e)	3+e	7+3e	8+4e	−(3+e)	6+2e	13+5e	4+2e	−(8+4e)	11+5e	26+12e	15+7e	0	−(8+4e)	−(14+6e)	−(22+10e)	104
105	″	″	″	38	64	102	104	113	−(4+2e)	4+2e	4+2e	10+4e	−(1+e)	7+3e	9+5e	7+3e	−(7+3e)	15+7e	21+9e	21+9e	0	−(14+6e)	−(8+4e)	−(22+10e)	105
106	″	17	21	58	101	108	110	258	−(3+e)	8+4e	7+3e	4+2e	3+e	9+5e	10+4e	0	1+e	25+11e	22+10e	4+2e	4+2e	−(18+8e)	−(18+8e)	−(10+4e)	106
107	″	″	38	46	102	108	117	257	−(4+2e)	8+4e	3+e	7+3e	2	11+5e	7+3e	6+2e	−(3+e)	26+12e	14+6e	15+7e	0	−(22+10e)	−(8+4e)	−(14+6e)	107
108	″	″	46	58	24	106	107	119	−(4+2e)	10+4e	4+2e	4+2e	1+e	13+5e	7+3e	1+e	−(1+e)	29+13e	15+7e	7+3e	0	−(22+10e)	−(14+6e)	−(8+4e)	108
109	″	21	34	50	45	103	110	114	−(4+2e)	4+2e	10+4e	4+2e	−(1+e)	7+3e	13+5e	−(1+e)	−(7+3e)	15+7e	29+13e	1+e	0	−(8+4e)	−(22+10e)	−(14+6e)	109
110	″	″	50	58	106	109	120	266	−(4+2e)	7+3e	8+4e	3+e	0	10+4e	9+5e	−(3+e)	−(4+2e)	22+10e	25+11e	−(1+e)	0	−(14+6e)	−(22+10e)	−(8+4e)	110
111	″	26	30	34	104	112	114	191	−(7+3e)	1+e	7+3e	7+3e	−(5+3e)	5+3e	11+5e	3+e	−(17+7e)	11+5e	25+11e	11+5e	7+3e	−(7+3e)	−(15+7e)	−(21+9e)	111
112	″	″	″	42	111	113	115	278	−(8+4e)	3+e	4+2e	7+3e	−(7+3e)	9+3e	8+4e	4+2e	−(19+9e)	15+7e	18+8e	14+6e	11+5e	−(11+5e)	−(11+5e)	−(19+9e)	112
113	″	″	38	″	105	112	117	275	−(7+3e)	4+2e	3+e	8+4e	−(4+2e)	8+4e	9+3e	7+3e	−(14+6e)	18+8e	15+7e	19+9e	−(7+3e)	−(15+7e)	−(7+3e)	−(21+9e)	113
114	″	30	34	50	109	111	116	288	−(7+3e)	3+e	8+4e	4+2e	−(6+2e)	7+3e	11+5e	−2	−(15+7e)	14+6e	26+12e	3+e	−(7+3e)	−(7+3e)	−(21+9e)	−(15+7e)	114
115	″	″	42	54	−9	112	116	118	−(10+4e)	4+2e	4+2e	4+2e	−(7+3e)	9+5e	7+3e	1+e	−(21+9e)	21+9e	15+7e	7+3e	−(14+6e)	−(14+6e)	−(14+6e)	−(14+6e)	115
116	″	″	50	″	114	116	120	286	−(8+4e)	4+2e	7+3e	3+e	−(5+3e)	10+4e	8+4e	−(1+e)	−(18+8e)	19+9e	21+9e	0	−(11+5e)	−(11+5e)	−(19+9e)	−(11+5e)	116
117	″	38	42	46	107	113	118	217	−(7+3e)	7+3e	1+e	7+3e	−(3+e)	11+5e	5+3e	5+3e	−(11+5e)	25+11e	11+5e	17+7e	−(7+3e)	−(21+9e)	−(7+3e)	−(15+7e)	117
118	″	42	46	54	115	117	119	292	−(8+4e)	7+3e	3+e	4+2e	−(4+2e)	13+5e	6+2e	3+e	−(15+7e)	26+12e	11+5e	8+4e	−(11+5e)	−(19+9e)	−(11+5e)	−(11+5e)	118
119	″	46	54	58	108	118	120	299	−(7+3e)	8+4e	4+2e	3+e	−(1+e)	12+6e	5+3e	0	−(10+4e)	29+13e	14+6e	3+e	−(7+3e)	−(21+9e)	−(15+7e)	−(7+3e)	119
120	″	50	″	″	110	116	119	240	−(7+3e)	7+3e	7+3e	1+e	−(3+e)	11+5e	9+3e	−(3+e)	−(11+5e)	25+11e	19+9e	−(3+e)	−(7+3e)	−(15+7e)	−(21+9e)	−(7+3e)	120
121	7	14	18	22	122	123	126	181	1+e	−(7+3e)	7+3e	7+3e	−(3+e)	−(9+3e)	11+5e	3+e	−(3+e)	−(19+9e)	25+11e	11+5e	7+3e	15+7e	−(7+3e)	−(21+9e)	121
122	″	″	″	39	121	125	127	246	3+e	−(7+3e)	4+2e	8+4e	−(1+e)	−(8+4e)	10+4e	5+3e	0	−(21+9e)	19+9e	18+8e	8+4e	14+6e	0	−(22+10e)	122
123	″	″	22	33	121	124	129	247	3+e	−(4+2e)	8+4e	7+3e	0	−(5+3e)	12+6e	1+e	3+e	−(14+6e)	29+13e	10+4e	11+5e	11+5e	−(11+5e)	−(19+9e)	123
124	″	″	25	″	123	125	131	241	4+2e	−(3+e)	7+3e	8+4e	3+e	−(6+2e)	13+5e	4+2e	8+4e	−(11+5e)	26+12e	15+7e	15+7e	7+3e	−(7+3e)	−(21+9e)	124
125	″	″	″	39	66	122	124	133	4+2e	−(4+2e)	4+2e	10+4e	1+e	−(7+3e)	9+5e	7+3e	7+3e	−(15+7e)	21+9e	21+9e	14+6e	8+4e	0	−(22+10e)	125
126	″	18	22	59	121	128	130	262	3+e	−(8+4e)	7+3e	4+2e	−(3+e)	−(9+5e)	10+4e	0	−(1+e)	−(25+11e)	22+10e	4+2e	7+3e	21+9e	−(7+3e)	−(15+7e)	126
127	″	″	39	47	122	128	137	260	4+2e	−(8+4e)	3+e	7+3e	−2	−(11+5e)	7+3e	6+2e	3+e	−(26+12e)	14+6e	15+7e	10+4e	18+8e	4+2e	−(18+8e)	127
128	″	″	47	59	−28	126	127	139	4+2e	−(10+4e)	4+2e	4+2e	−(1+e)	−(13+5e)	7+3e	1+e	1+e	−(29+13e)	15+7e	7+3e	8+4e	22+10e	0	−(14+6e)	128
129	″	22	33	51	49	123	130	134	4+2e	−(4+2e)	10+4e	4+2e	1+e	−(7+3e)	13+5e	−(1+e)	7+3e	−(15+7e)	29+13e	1+e	14+6e	14+6e	−(14+6e)	−(14+6e)	129
130	″	″	51	59	126	129	140	268	4+2e	−(7+3e)	8+4e	3+e	0	−(10+4e)	9+5e	−(3+e)	4+2e	−(22+10e)	25+11e	−(1+e)	11+5e	19+9e	−(11+5e)	−(11+5e)	130
131	″	25	29	33	91	124	132	134	7+3e	−(1+e)	7+3e	7+3e	5+3e	−(5+3e)	11+5e	3+e	17+7e	−(11+5e)	25+11e	11+5e	21+9e	7+3e	−(7+3e)	−(15+7e)	131
132	″	″	″	43	131	133	135	274	8+4e	−(3+e)	4+2e	7+3e	7+3e	−(9+3e)	8+4e	4+2e	19+9e	−(15+7e)	18+8e	14+6e	22+10e	8+4e	0	−(14+6e)	132
133	″	″	39	″	125	132	137	272	7+3e	−(4+2e)	3+e	8+4e	4+2e	−(8+4e)	9+3e	7+3e	14+6e	−(18+8e)	15+7e	19+9e	18+8e	10+4e	4+2e	−(18+8e)	133
134	″	29	33	51	129	131	136	284	7+3e	−(3+e)	8+4e	4+2e	6+2e	−(7+3e)	11+5e	−2	15+7e	−(14+6e)	26+12e	3+e	19+9e	11+5e	−(11+5e)	−(11+5e)	134
135	″	″	43	55	5	132	130	138	10+4e	−(4+2e)	4+2e	4+2e	7+3e	−(9+5e)	7+3e	1+e	21+9e	−(21+9e)	15+7e	7+3e	22+10e	14+6e	0	−(8+4e)	135
136	″	″	51	″	134	135	140	283	8+4e	−(4+2e)	7+3e	3+e	5+3e	−(10+4e)	8+4e	−(1+e)	18+8e	−(19+9e)	21+9e	0	21+9e	15+7e	−(7+3e)	−(7+3e)	136
137	″	39	43	47	127	133	138	−237	7+3e	−(7+3e)	1+e	7+3e	3+e	−(11+5e)	5+3e	5+3e	11+5e	−(25+11e)	11+5e	17+7e	15+7e	15+7e	7+3e	−(15+7e)	137
138	″	43	47	55	135	137	139	293	8+4e	−(7+3e)	3+e	4+2e	4+2e	−(13+5e)	6+2e	3+e	15+7e	−(26+12e)	11+5e	8+4e	18+8e	18+8e	4+2e	−(10+4e)	138
139	″	47	55	59	128	138	140	−300	7+3e	−(8+4e)	4+2e	3+e	1+e	−(12+6e)	5+3e	0	10+4e	−(29+13e)	14+6e	3+e	14+6e	22+10e	0	−(8+4e)	139
140	″	51	″	″	130	136	139	−220	7+3e	−(7+3e)	7+3e	1+e	3+e	−(11+5e)	9+3e	−(3+e)	11+5e	−(25+11e)	19+9e	−(3+e)	15+7e	21+9e	−(7+3e)	−(7+3e)	140
141	8	15	19	23	142	143	146	201	1+e	7+3e	−(7+3e)	7+3e	5+3e	5+3e	−(3+e)	11+5e	11+5e	17+7e	−(11+5e)	25+11e	7+3e	−(21+9e)	15+7e	−(7+3e)	141
142	″	″	″	37	141	145	147	251	3+e	7+3e	−(4+2e)	8+4e	7+3e	6+2e	2	11+5e	14+6e	15+7e	−(3+e)	26+12e	11+5e	−(19+9e)	11+5e	−(11+5e)	142
143	″	″	23	35	141	144	149	252	3+e	4+2e	−(8+4e)	7+3e	6+2e	3+e	−(4+2e)	13+5e	11+5e	8+4e	−(15+7e)	26+12e	7+3e	−(15+7e)	21+9e	−(7+3e)	143
144	″	″	27	″	143	145	151	248	4+2e	3+e	−(7+3e)	8+4e	5+3e	0	−(1+e)	12+6e	14+6e	3+e	−(10+4e)	29+13e	11+5e	−(11+5e)	19+9e	−(11+5e)	144
145	″	″	″	37	71	142	144	153	4+2e	4+2e	−(4+2e)	10+4e	7+3e	1+e	1+e	13+5e	15+7e	7+3e	−(1+e)	29+13e	14+6e	−(14+6e)	14+6e	−(14+6e)	145
146	″	19	23	60	141	148	150	263	3+e	8+4e	−(7+3e)	4+2e	9+3e	7+3e	−(4+2e)	8+4e	15+7e	19+9e	−(14+6e)	18+8e	8+4e	−(22+10e)	14+6e	0	146
147	″	″	37	45	142	148	157	256	4+2e	8+4e	−(3+e)	7+3e	10+4e	5+3e	1+e	8+4e	19+9e	18+8e	0	21+9e	15+7e	−(21+9e)	7+3e	−(7+3e)	147
148	″	″	45	60	31	146	147	159	4+2e	10+4e	−(4+2e)	4+2e	9+5e	7+3e	−(1+e)	7+3e	21+9e	21+9e	−(7+3e)	15+7e	14+6e	−(22+10e)	8+4e	0	148
149	″	23	35	52	−52	143	150	154	4+2e	4+2e	−(10+4e)	4+2e	7+3e	1+e	−(7+3e)	9+5e	15+7e	7+3e	−(21+9e)	21+9e	8+4e	−(14+6e)	22+10e	0	149
150	″	″	52	60	146	149	160	−269	4+2e	7+3e	−(8+4e)	3+e	8+4e	4+2e	−(7+3e)	9+3e	18+8e	14+6e	−(19+9e)	15+7e	10+4e	−(18+8e)	18+8e	4+2e	150

	A. Ableitung aus den 120 Eckpunkten des Z^{600}				B. Verbindungen zu Kanten.				C. Dritte Querlinie. EINHEIT $= \frac{\text{Kante}}{2(1+e)}$				D. Zweite Querlinie. EINHEIT $= \frac{\text{Kante}}{2\sqrt{10+2e}}$				E. Erste Querlinie. EINHEIT $= \frac{\text{Kante}}{2\sqrt{21+9e}}$				F. Zelldiagonale. EINHEIT $= \frac{\text{Kante}}{\sqrt{7+3e}}$				
151	8	27	31	35	144	152	154	—231	7+3e	1+e	—(7+3e)	7+3e	9+3e	—(3+e)	—(3+e)	11+5e	19+9e	—(3+e)	—(11+5e)	25+11e	15+7e	—(7+3e)	21+9e	—(7+3e)	151
152	„	„	„	41	151	153	155	279	8+4e	3+e	—(4+2e)	7+3e	9+5e	—(3+e)	0	10+4e	25+11e	—(1+e)	—(4+2e)	22+10e	21+9e	—(7+3e)	15+7e	—(7+3e)	152
153	„	„	37	„	145	152	157	271	7+3e	4+2e	—(3+e)	8+4e	10+4e	0	3+e	9+5e	22+10e	4+2e	1+e	25+11e	19+9e	—(11+5e)	11+5e	—(11+5e)	153
154	„	31	35	52	149	151	156	289	7+3e	3+e	—(8+4e)	4+2e	8+4e	—(1+e)	—(5+3e)	10+4e	21+9e	0	—(18+8e)	19+9e	14+6e	—(8+4e)	22+10e	0	154
155	„	„	41	56	12	153	156	158	10+4e	4+2e	—(4+2e)	4+2e	13+5e	—(1+e)	—(1+e)	7+3e	29+13e	1+e	—(7+3e)	15+7e	22+10e	—(8+4e)	14+6e	0	155
156	„	„	53	„	154	155	160	—287	8+4e	4+2e	—(7+3e)	3+e	11+5e	—2	—(6+2e)	7+3e	26+12e	3+e	—(15+7e)	14+6e	18+8e	—(10+4e)	18+8e	4+2e	156
157	„	37	41	45	97	147	153	168	7+3e	7+3e	—(1+e)	7+3e	11+5e	3+e	3+e	9+3e	25+11e	11+5e	3+e	19+9e	21+9e	—(15+7e)	7+3e	—(7+3e)	157
158	„	41	45	56	155	157	159	291	8+4e	7+3e	—(3+e)	4+2e	12+6e	1+e	0	5+3e	29+13e	10+4e	—(3+e)	14+6e	22+10e	—(14+6e)	8+4e	0	158
159	„	45	56	60	148	153	160	297	7+3e	8+4e	—(4+2e)	3+e	13+5e	4+2e	—(3+e)	6+2e	26+12e	15+7e	—(8+4e)	11+5e	18+8e	—(18+8e)	10+4e	4+2e	159
160	„	52	„	„	150	156	159	—200	7+3e	7+3e	—(7+3e)	1+e	11+5e	3+e	—(5+3e)	5+3e	25+11e	11+5e	—(17+7e)	11+5e	15+7e	—(15+7e)	15+7e	7+3e	160
161	9	16	20	24	162	163	166	221	1+e	7+3e	7+3e	—(7+3e)	5+3e	5+3e	3+e	—(11+5e)	11+5e	17+7e	11+5e	—(25+11e)	7+3e	—(7+3e)	—(21+9e)	15+7e	161
162	„	„	„	40	161	165	167	253	3+e	7+3e	4+2e	—(8+4e)	7+3e	6+2e	—2	—(11+5e)	14+6e	15+7e	3+e	—(26+12e)	7+3e	—(7+3e)	—(15+7e)	21+9e	162
163	„	„	24	36	161	164	169	254	3+e	4+2e	8+4e	—(7+3e)	6+2e	3+e	4+2e	—(13+5e)	11+5e	8+4e	15+7e	—(26+12e)	8+4e	0	—(22+10e)	14+6e	163
164	„	„	28	„	163	165	171	—249	4+2e	3+e	7+3e	—(8+4e)	5+3e	0	1+e	—(12+6e)	14+6e	3+e	10+4e	—(29+13e)	10+4e	4+2e	—(18+8e)	18+8e	164
165	„	„	„	40	—75	162	164	173	4+2e	4+2e	4+2e	—(10+4e)	7+3e	1+e	—(1+e)	—(13+5e)	15+7e	7+3e	1+e	—(29+13e)	8+4e	0	—(14+6e)	22+10e	165
166	„	20	24	57	161	168	170	264	3+e	8+4e	7+3e	—(4+2e)	9+3e	7+3e	4+2e	—(8+4e)	15+7e	19+9e	14+6e	—(18+8e)	11+5e	—(11+5e)	—(19+9e)	11+5e	166
167	„	„	40	48	162	168	177	—261	4+2e	8+4e	3+e	—(7+3e)	10+4e	5+3e	—(1+e)	—(8+4e)	19+9e	18+8e	0	—(21+9e)	11+5e	—(11+5e)	—(11+5e)	19+9e	167
168	„	„	48	57	35	166	167	179	4+2e	10+4e	4+2e	—(4+2e)	9+5e	7+3e	1+e	—(7+3e)	21+9e	21+9e	7+3e	—(15+7e)	14+6e	—(14+6e)	—(14+6e)	14+6e	168
169	„	24	36	49	56	163	170	174	4+2e	4+2e	10+4e	—(4+2e)	7+3e	1+e	7+3e	—(9+5e)	15+7e	7+3e	21+9e	—(21+9e)	14+6e	0	—(22+10e)	8+4e	169
170	„	„	49	57	166	169	180	266	4+2e	7+3e	8+4e	—(3+e)	8+4e	4+2e	7+3e	—(9+3e)	18+8e	14+6e	19+9e	—(15+7e)	15+7e	—(7+3e)	—(21+9e)	7+3e	170
171	„	28	32	36	164	172	174	—211	7+3e	1+e	7+3e	—(7+3e)	9+3e	—(3+e)	3+e	—(11+5e)	19+9e	—(3+e)	11+5e	—(25+11e)	15+7e	7+3e	—(15+7e)	15+7e	171
172	„	„	„	44	171	173	176	280	8+4e	3+e	4+2e	—(7+3e)	9+5e	—(3+e)	0	—(10+4e)	25+11e	—(1+e)	4+2e	—(22+10e)	18+8e	4+2e	—(10+4e)	18+8e	172
173	„	„	40	„	165	172	177	—276	7+3e	4+2e	3+e	—(8+4e)	10+4e	0	—(3+e)	—(9+5e)	22+10e	4+2e	—(1+e)	—(25+11e)	14+6e	0	—(8+4e)	22+10e	173
174	„	32	36	49	169	171	176	290	7+3e	3+e	8+4e	—(4+2e)	8+4e	—(1+e)	5+3e	—(10+4e)	21+9e	0	—(18+8e)	—(19+9e)	18+8e	4+2e	—(18+8e)	10+4e	174
175	„	„	44	53	16	172	176	178	10+4e	4+2e	4+2e	—(4+2e)	13+5e	—(1+e)	1+e	—(7+3e)	29+13e	1+e	7+3e	—(15+7e)	22+10e	0	—(8+4e)	14+6e	175
176	„	„	49	„	174	175	180	282	8+4e	4+2e	7+3e	—(3+e)	11+5e	—2	6+2e	—(7+3e)	26+12e	3+e	15+7e	—(14+6e)	22+10e	0	—(14+6e)	8+4e	176
177	„	40	44	48	167	173	178	—197	7+3e	7+3e	1+e	—(7+3e)	11+5e	3+e	—(3+e)	—(9+3e)	25+11e	11+5e	—(3+e)	—(19+9e)	15+7e	—(7+3e)	—(7+3e)	21+9e	177
178	„	44	48	53	175	177	179	294	8+4e	7+3e	3+e	—(4+2e)	12+6e	1+e	0	—(5+3e)	29+13e	10+4e	3+e	—(14+6e)	21+9e	—(7+3e)	—(7+3e)	15+11e	178
179	„	48	53	57	168	178	180	296	7+3e	8+4e	4+2e	—(3+e)	13+5e	4+2e	3+e	—(6+2e)	26+12e	15+7e	8+4e	—(11+5e)	19+9e	—(11+5e)	—(11+5e)	11+5e	179
180	„	49	„	„	100	170	176	179	7+3e	7+3e	7+3e	—(1+e)	11+5e	3+e	5+3e	—(5+3e)	25+11e	11+5e	17+7e	—(11+5e)	21+9e	—(7+3e)	—(15+7e)	7+3e	180
181	10	14	18	22	121	182	183	186	—(1+e)	—(7+3e)	7+3e	7+3e	—(5+3e)	—(5+3e)	11+5e	3+e	—(11+5e)	—(17+7e)	25+11e	11+5e	0	14+6e	—(8+4e)	—(22+10e)	181
182	„	„	„	—40	181	185	187	246	—(3+e)	—(7+3e)	4+2e	8+4e	—(7+3e)	—(6+2e)	10+4e	5+3e	—(14+6e)	—(15+7e)	19+9e	18+8e	—(3+e)	11+5e	—(3+e)	—(25+11e)	182
183	„	„	22	34	181	184	189	247	—(3+e)	—(4+2e)	8+4e	7+3e	—(6+2e)	—(3+e)	12+6e	1+e	—(11+5e)	—(8+4e)	29+13e	10+4e	0	8+4e	—(14+6e)	—(22+10e)	183
184	„	„	26	„	183	185	191	242	—(4+2e)	—(3+e)	7+3e	8+4e	—(5+3e)	0	13+5e	4+2e	—(14+6e)	—(3+e)	26+12e	15+7e	—(3+e)	3+e	—(11+5e)	—(25+11e)	184
185	„	„	„	—40	67	182	184	193	—(4+2e)	—(4+2e)	4+2e	10+4e	—(7+3e)	—(1+e)	9+5e	7+3e	—(15+7e)	—(7+3e)	21+9e	21+9e	—(4+2e)	4+2e	—(4+2e)	—(26+12e)	185
186	„	18	22	—60	181	188	190	262	—(3+e)	—(8+4e)	7+3e	4+2e	—(9+3e)	—(7+3e)	10+4e	0	—(15+7e)	—(19+9e)	22+10e	4+2e	—(4+2e)	18+8e	—(10+4e)	—(18+8e)	186
187	„	„	—40	—48	182	188	197	251	—(4+2e)	—(8+4e)	3+e	7+3e	—(10+4e)	—(5+3e)	7+3e	6+2e	—(19+9e)	—(18+8e)	14+6e	15+7e	—(8+4e)	14+6e	0	—(22+10e)	187
188	„	„	—48	—60	—29	186	187	199	—(4+2e)	—(10+4e)	4+2e	4+2e	—(9+5e)	—(7+3e)	7+3e	1+e	—(21+9e)	—(21+9e)	15+7e	7+3e	—(10+4e)	18+8e	—(4+2e)	—(18+8e)	188
189	„	22	34	—52	50	183	190	194	—(4+2e)	—(4+2e)	10+4e	4+2e	—(7+3e)	—(1+e)	13+5e	—(1+e)	—(15+7e)	—(7+3e)	29+13e	1+e	—(4+2e)	10+4e	—(18+8e)	—(18+8e)	189
190	„	„	—53	—60	186	189	200	260	—(4+2e)	—(7+3e)	8+4e	3+e	—(8+4e)	—(4+2e)	9+5e	—(3+e)	—(18+8e)	—(14+6e)	25+11e	—(1+e)	—(7+3e)	15+7e	—(15+7e)	—(15+7e)	190
191	„	26	30	34	111	184	192	194	—(7+3e)	—(1+e)	7+3e	7+3e	—(9+3e)	3+e	11+5e	3+e	—(19+9e)	3+e	25+11e	11+5e	—(8+4e)	0	—(14+6e)	—(22+10e)	191
192	„	„	„	—44	191	193	195	278	—(8+4e)	—(3+e)	4+2e	7+3e	—(9+5e)	3+e	8+4e	4+2e	—(25+11e)	1+e	18+8e	14+6e	—(14+6e)	0	—(8+4e)	—(22+10e)	192
193	„	„	—40	„	185	192	197	276	—(7+3e)	—(4+2e)	3+e	8+4e	—(10+4e)	0	9+3e	7+3e	—(22+10e)	—(4+2e)	15+7e	19+9e	—(11+5e)	3+e	—(3+e)	—(25+11e)	193
194	„	30	34	—52	189	191	196	285	—(7+3e)	—(3+e)	8+4e	4+2e	—(8+4e)	1+e	11+5e	—2	—(21+9e)	0	26+12e	3+e	—(10+4e)	4+2e	—(18+8e)	—(18+8e)	194
195	„	„	—44	—56	—10	192	196	198	—(10+4e)	—(4+2e)	4+2e	4+2e	—(13+5e)	1+e	7+3e	1+e	—(29+13e)	—(1+e)	15+7e	7+3e	—(18+8e)	4+2e	—(10+4e)	—(18+8e)	195
196	„	„	—52	„	194	195	200	287	—(8+4e)	—(4+2e)	7+3e	3+e	—(11+5e)	2	8+4e	—(1+e)	—(26+12e)	—(3+e)	21+9e	0	—(15+7e)	7+3e	—(15+7e)	—(15+7e)	196
197	„	—40	—44	—48	—177	187	193	198	—(7+3e)	—(7+3e)	1+e	7+3e	—(11+5e)	—(3+e)	5+3e	5+3e	—(25+11e)	—(11+5e)	11+5e	17+7e	—(14+6e)	8+4e	0	—(22+10e)	197
198	„	—44	—48	—56	195	197	199	—294	—(8+4e)	—(7+3e)	3+e	4+2e	—(12+6e)	—(1+e)	6+2e	3+e	—(29+13e)	—(10+4e)	11+5e	8+4e	—(18+8e)	10+4e	—(4+2e)	—(18+8e)	198
199	„	—48	—56	—60	188	198	200	—297	—(7+3e)	—(8+4e)	4+2e	1+e	—(13+5e)	—(4+2e)	5+3e	0	—(26+12e)	—(15+7e)	14+6e	3+e	—(15+7e)	15+7e	—(7+3e)	—(15+7e)	199
200	„	—52	„	„	—160	190	196	199	—(7+3e)	—(7+3e)	7+3e	1+e	—(11+5e)	—(3+e)	9+3e	—(3+e)	—(25+11e)	—(11+5e)	19+9e	—(3+e)	—(14+6e)	14+6e	—(14+6e)	—(14+6e)	200
201	11	15	19	23	141	202	203	206	—(1+e)	7+3e	—(7+3e)	7+3e	3+e	9+3e	—(3+e)	11+5e	3+e	19+9e	—(11+5e)	25+11e	0	—(22+10e)	14+6e	—(8+4e)	201
202	„	„	„	38	201	205	207	251	—(3+e)	7+3e	—(4+2e)	8+4e	1+e	8+4e	2	11+5e	0	21+9e	—(3+e)	26+12e	0	—(22+10e)	8+4e	—(14+6e)	202
203	„	„	23	—36	201	204	209	252	—(3+e)	4+2e	—(8+4e)	7+3e	0	5+3e	—(4+2e)	13+5e	—(3+e)	14+6e	—(15+7e)	26+12e	—(4+2e)	—(18+8e)	18+8e	—(10+4e)	203
204	„	„	—28	„	203	205	211	249	—(4+2e)	3+e	—(7+3e)	8+4e	—(3+e)	6+2e	—(1+e)	12+6e	—(8+4e)	11+5e	—(10+4e)	29+13e	—(7+3e)	—(15+7e)	15+7e	—(15+7e)	204
205	„	„	„	38	72	201	204	213	—(4+2e)	4+2e	—(4+2e)	10+4e	—(1+e)	7+3e	1+e	13+5e	—(7+3e)	15+7e	—(1+e)	29+13e	—(4+2e)	—(18+8e)	10+4e	—(18+8e)	205
206	„	19	23	—59	201	208	210	263	—(3+e)	8+4e	—(7+3e)	4+2e	3+e	9+5e	—(4+2e)	8+4e	1+e	25+11e	—(14+6e)	18+8e	—(3+e)	—(25+11e)	11+5e	—(3+e)	206
207	„	„	38	46	202	208	217	257	—(4+2e)	8+4e	—(3+e)	7+3e	2	11+5e	1+e	8+4e	—(3+e)	26+12e	0	21+9e	—(3+e)	—(25+11e)	3+e	—(11+5e)	207
208	„	„	46	—59	32	206	207	219	—(4+2e)	10+4e	—(4+2e)	4+2e	1+e	13+5e	—(1+e)	7+3e	—(1+e)	29+13e	—(7+3e)	15+7e	—(4+2e)	—(26+12e)	4+2e	—(4+2e)	208
209	„	23	—36	—51	—53	203	210	214	—(4+2e)	4+2e	—(10+4e)	4+2e	—(1+e)	7+3e	—(7+3e)	9+5e	—(7+3e)	15+7e	—(21+9e)	21+9e	—(10+4e)	—(18+8e)	18+8e	—(4+2e)	209
210	„	„	—51	—59	206	209	220	—208	—(4+2e)	7+3e	—(8+4e)	3+e	0	10+4e	—(7+3e)	9+3e	—(4+2e)	22+10e	—(19+9e)	15+7e	—(8+4e)	—(22+10e)	14+6e	0	210
211	„	—28	—32	—36	—171	204	212	214	—(7+3e)	1+e	—(7+3e)	7+3e	—(5+3e)	5+3e	—(3+e)	11+5e	—(17+7e)	11+5e	—(11+5e)	25+11e	—(14+6e)	—(14+6e)	14+6e	—(14+6e)	211
212	„	„	„	42	211	213	215	—280	—(8+4e)	3+e	—(4+2e)	7+3e	—(7+3e)	9+3e	0	10+4e	—(19+9e)	15+7e	—(4+2e)	22+10e	—(15+7e)	—(15+7e)	7+3e	—(15+7e)	212
213	„	„	38	„	205	212	217	275	—(7+3e)	4+2e	—(3+e)	8+4e	—(4+2e)	8+4e	3+e	9+5e	—(14+6e)	18+8e	1+e	25+11e	—(10+4e)	—(18+8e)	4+2e	—(18+8e)	213
214	„	—32	—36	—51	209	211	216	—290	—(7+3e)	3+e	—(8+4e)	4+2e	—(6+2e)	7+3e	—(5+3e)	10+4e	—(15+7e)	14+6e	18+8e	19+9e	—(15+7e)	—(15+7e)	15+7e	—(7+3e)	214
215	„	„	42	—55	—15	212	216	218	—(10+4e)	4+2e	—(4+2e)	4+2e	—(7+3e)	9+5e	—(1+e)	7+3e	—(21+9e)	21+9e	—(7+3e)	15+7e	—(18+8e)	—(18+8e)	4+2e	—(10+4e)	215
216	„	„	—51	„	214	215	220	—283	—(8+4e)	4+2e	—(7+3e)	3+e	—(5+3e)	10+4e	—(6+2e)	7+3e	—(18+8e)	19+9e	—(15+7e)	14+6e	—(18+8e)	—(18+8e)	10+4e	—(4+2e)	216
217	„	38	42	46	117	207	213	218	—(7+3e)	7+3e	—(1+e)	7+3e	—(3+e)	11+5e	5+3e	9+3e	—(11+5e)	25+11e	3+e	19+9e	—(8+4e)	—(22+10e)	0	—(14+6e)	217
218	„	42	46	—55	215	217	219	292	—(8+4e)	7+3e	—(3+e)	4+2e	—(4+2e)	13+5e	0	5+3e	—(15+7e)	26+12e	—(3+e)	14+6e	—(14+6e)	—(22+10e)	0	—(8+4e)	218
219	„	46	—55	—59	208	218	220	300	—(7+3e)	8+4e	—(4+2e)	3+e	—(1+e)	12+6e	—(3+e)	6+2e	—(10+4e)	29+13e	—(8+4e)	11+5e	—(11+5e)	—(25+11e)	3+e	—(3+e)	219
220	„	—51	„	„	—140	210	216	219	—(7+3e)	7+3e	—(7+3e)	1+e	—(3+e)	11+5e	—(5+3e)	5+3e	—(11+5e)	25+11e	—(17+7e)	11+5e	—(14+6e)	—(22+10e)	8+4e	0	220
221	12	16	20	24	161	222	223	226	—(1+e)	7+3e	7+3e	—(7+3e)	3+e	9+3e	3+e	—(11+5e)	3+e	19+9e	11+5e	—(25+11e)	0	—(8+4e)	—(22+10e)	14+6e	221
222	„	„	„	—39	221	225	227	253	—(3+e)	7+3e	4+2e	—(8+4e)	1+e	8+4e	—2	—(11+5e)	0	21+9e	3+e	—(26+12e)	—(4+2e)	—(10+4e)	—(18+8e)	18+8e	222
223	„	„	24	—35	221	224	229	254	—(3+e)	4+2e	8+4e	—(7+3e)	0	5+3e	4+2e	—(13+5e)	—(3+e)	14+6e	15+7e	—(26+12e)	—(3+e)	—(3+e)	—(25+11e)	11+5e	223
224	„	„	—27	„	223	225	231	—248	—(4+2e)	3+e	7+3e	—(8+4e)	—(3+e)	6+2e	1+e	—(12+6e)	—(8+4e)	11+5e	10+4e	—(29+13e)	—(8+4e)	0	—(22+10e)	14+6e	224
225	„	„	„	—39	—74	222	224	233	—(4+2e)	4+2e	4+2e	—(10+4e)	—(1+e)	7+3e	—(1+e)	—(13+5e)	—(7+3e)	15+7e	1+e	—(29+13e)	—(10+4e)	—(4+2e)	—(18+8e)	18+8e	225

TABELLE III. Coordinatenstellung des Z^{120}.

	A. Ableitung aus den 120 Eckpunkten des Z^{600}				B. Verbindungen zu Kanten.				C. Dritte Querlinie. EINHEIT $= \frac{\text{Kante}}{2(1+e)}$				D. Zweite Querlinie. EINHEIT $= \frac{\text{Kante}}{2\sqrt{10+2e}}$				E. Erste Querlinie. EINHEIT $= \frac{\text{Kante}}{2\sqrt{21+9e}}$				F. Zelldiagonale. EINHEIT $= \frac{\text{Kante}}{\sqrt{7+3e}}$				
226	12	20	24	58	221	228	230	264	−(3+e)	8+4e	7+3e	−(4+2e)	3+e	9+5e	4+2e	−(8+4e)	1+e	25+11e	14+6e	−(18+8e)	0	−(14+6e)	−(22+10e)	8+4e	226
227	·	·	−39	−47	222	228	237	−260	−(4+2e)	8+4e	3+e	−(7+3e)	2	11+5e	−(1+e)	−(8+4e)	−(3+e)	26+12e	0	−(21+9e)	−(7+3e)	−(15+7e)	−(15+7e)	15+7e	227
228	·	·	−47	58	34	226	227	239	−(4+2e)	10+4e	4+2e	−(4+2e)	1+e	13+5e	1+e	−(7+3e)	−(1+e)	29+13e	7+3e	−(15+7e)	−(4+2e)	−(18+8e)	−(18+8e)	10+4e	228
229	·	24	−35	50	55	223	230	234	−(4+2e)	4+2e	10+4e	−(4+2e)	−(1+e)	7+3e	7+3e	−(9+5e)	−(7+3e)	15+7e	21+9e	−(21+9e)	−(4+2e)	−(4+2e)	−(26+12e)	4+2e	229
230	·	·	50	58	226	229	240	266	−(4+2e)	7+3e	8+4e	−(3+e)	0	10+4e	7+3e	−(9+3e)	−(4+2e)	22+10e	19+9e	−(15+7e)	−(3+e)	−(11+5e)	−(25+11e)	3+e	230
231	·	−27	−31	−35	−151	224	232	234	−(7+3e)	1+e	7+3e	−(7+3e)	−(5+3e)	5+3e	3+e	−(11+5e)	−(17+7e)	11+5e	11+5e	−(25+11e)	−(14+6e)	0	−(22+10e)	8+4e	231
232	·	·	·	−43	231	233	235	−279	−(8+4e)	3+e	4+2e	−(7+3e)	−(7+3e)	9+3e	0	−(10+4e)	−(19+9e)	15+7e	4+2e	−(22+10e)	−(18+8e)	−(4+2e)	−(18+8e)	10+4e	232
233	·	·	−30	·	225	232	237	−272	−(7+3e)	4+2e	3+e	−(8+4e)	−(4+2e)	8+4e	−(3+e)	−(9+5e)	−(14+6e)	18+8e	−(1+e)	−(25+11e)	−(15+7e)	−(7+3e)	−(15+7e)	15+7e	233
234	·	−31	−35	50	229	231	236	−289	−(7+3e)	3+e	8+4e	−(4+2e)	−(6+2e)	7+3e	5+3e	−(10+4e)	−(15+7e)	14+6e	18+8e	−(19+9e)	−(11+5e)	−(3+e)	−(25+11e)	3+e	234
235	·	·	−43	54	−13	232	236	238	−(10+4e)	4+2e	4+2e	−(4+2e)	−(7+3e)	9+5e	1+e	−(7+3e)	−(21+9e)	21+9e	7+3e	−(15+7e)	−(18+8e)	−(10+4e)	−(18+8e)	4+2e	235
236	·	·	50	·	234	235	240	286	−(8+4e)	4+2e	7+3e	−(3+e)	−(5+3e)	10+4e	6+2e	−(7+3e)	−(18+8e)	19+9e	15+7e	−(14+6e)	−(14+6e)	−(8+4e)	−(22+10e)	0	236
237	·	39	−13	−17	−137	227	233	238	−(7+3e)	7+3e	1+e	−(7+3e)	−(3+e)	11+5e	−(3+e)	−(9+3e)	−(11+5e)	25+11e	−(3+e)	−(19+9e)	−(14+6e)	−(14+6e)	−(14+6e)	14+6e	237
238	·	−13	−47	54	235	237	239	−293	−(8+4e)	7+3e	3+e	−(4+2e)	−(4+2e)	13+5e	0	−(5+3e)	−(15+7e)	26+12e	3+e	−(14+6e)	−(15+7e)	−(15+7e)	−(15+7e)	7+3e	238
239	·	−17	54	58	228	238	240	299	−(7+3e)	8+4e	4+2e	−(3+e)	−(1+e)	12+6e	3+e	−(6+2e)	−(10+4e)	29+13e	8+4e	−(11+5e)	−(10+4e)	−(18+8e)	−(18+8e)	4+2e	239
240	·	50	·	·	120	230	236	239	−(7+3e)	7+3e	7+3e	−(1+e)	−(3+e)	11+5e	5+3e	−(5+3e)	−(11+5e)	25+11e	17+7e	−(11+5e)	−(8+4e)	−(14+6e)	−(22+10e)	0	240
241	13	14	25	33	61	84	124	243	3+e	0	7+3e	10+4e	3+e	−(1+e)	12+6e	6+2e	7+3e	−(3+e)	28+12e	18+8e	14+6e	0	−(8+4e)	−(22+10e)	241
242	·	·	26	34	62	101	184	243	−(3+e)	0	7+3e	10+4e	−(3+e)	1+e	12+6e	6+2e	−(7+3e)	3+e	28+12e	18+8e	3+e	−(3+e)	−(11+5e)	−(25+11e)	242
243	·	·	33	·	241	242	245	247	0	0	8+4e	8+4e	0	0	11+6e	2+2e	0	0	30+14e	14+6e	8+4e	0	−(14+6e)	−(22+10e)	243
244	·	17	37	38	65	82	102	256	0	7+3e	3+e	10+4e	4+2e	7+3e	8+4e	9+3e	7+3e	18+8e	17+7e	22+10e	10+4e	−(18+8e)	−(4+2e)	−(18+8e)	244
245	·	21	33	34	43	83	103	243	0	3+e	10+4e	7+3e	1+e	3+e	14+6e	2	3+e	7+3e	32+14e	8+4e	10+4e	−(4+2e)	−(18+8e)	−(18+8e)	245
246	14	18	39	−40	68	122	182	250	0	−(7+3e)	3+e	10+4e	−(4+2e)	−(7+3e)	8+4e	9+3e	−(7+3e)	−(18+8e)	17+7e	22+10e	3+e	11+5e	3+e	−(25+11e)	246
247	·	22	33	34	18	123	183	243	0	−(3+e)	10+4e	7+3e	−(1+e)	−(3+e)	14+6e	2	−(3+e)	−(7+3e)	32+14e	8+4e	7+3e	7+3e	−(15+7e)	−(21+9e)	247
248	15	−16	27	35	69	144	−224	250	3+e	0	−(7+3e)	10+4e	3+e	−(1+e)	−2	14+6e	7+3e	−(3+e)	−(8+4e)	32+14e	7+3e	−(7+3e)	21+9e	−(15+7e)	248
249	·	·	−28	−36	70	−164	204	250	−(3+e)	0	−(7+3e)	10+4e	−(3+e)	1+e	−2	14+6e	−(7+3e)	3+e	−(8+4e)	32+14e	−(4+2e)	−(10+4e)	18+8e	−(18+8e)	249
250	·	·	35	·	248	249	252	−254	0	0	−(8+4e)	8+4e	0	0	−(2+2e)	14+6e	0	0	−(14+6e)	30+14e	0	−(8+4e)	22+10e	−(14+6e)	250
251	·	19	37	38	73	142	202	255	0	7+3e	−(3+e)	10+4e	4+2e	7+3e	2+2e	11+5e	7+3e	18+8e	3+e	28+12e	7+3e	−(21+9e)	7+3e	−(15+7e)	251
252	·	23	35	−36	−51	143	203	250	0	3+e	−(10+4e)	7+3e	1+e	3+e	−(6+2e)	12+6e	3+e	7+3e	−(18+8e)	28+12e	0	−(14+6e)	22+10e	−(8+4e)	252
253	16	20	−39	40	−76	162	222	−259	0	7+3e	3+e	−(10+4e)	4+2e	7+3e	−(2+2e)	−(11+5e)	7+3e	18+8e	−(3+e)	−(28+12e)	0	−(8+4e)	−(14+6e)	22+10e	253
254	·	24	−35	36	54	163	223	−260	0	3+e	10+4e	−(7+3e)	1+e	3+e	6+2e	−(12+6e)	3+e	7+3e	18+8e	−(28+12e)	3+e	3+e	−(25+11e)	11+5e	254
255	17	19	37	38	244	251	256	257	0	8+4e	0	8+4e	6+2e	8+4e	6+2e	8+4e	8+4e	22+10e	8+4e	22+10e	8+4e	−(22+10e)	0	−(14+6e)	255
256	·	·	·	45	21	87	147	255	3+e	10+4e	0	7+3e	8+4e	9+3e	4+2e	7+3e	17+7e	22+10e	7+3e	18+8e	14+6e	−(22+10e)	0	−(8+4e)	256
257	·	·	38	46	22	107	207	255	−(3+e)	10+4e	0	7+3e	2+2e	11+5e	4+2e	7+3e	3+e	28+12e	7+3e	18+8e	3+e	−(25+11e)	−(3+e)	−(11+5e)	257
258	·	21	57	58	25	86	106	267	0	10+4e	7+3e	3+e	5+3e	10+4e	8+4e	−(1+e)	10+4e	25+11e	21+9e	0	10+4e	−(18+8e)	−(18+8e)	−(4+2e)	258
259	18	−20	33	−40	246	−253	260	261	0	−(8+4e)	0	8+4e	−(6+2e)	−(8+4e)	6+2e	8+4e	−(8+4e)	−(22+10e)	8+4e	22+10e	0	22+10e	8+4e	−(22+10e)	259
260	·	·	·	47	−26	127	−227	259	3+e	−(10+4e)	0	7+3e	−(2+2e)	−(11+5e)	4+2e	7+3e	−(3+e)	−(28+12e)	7+3e	18+8e	4+2e	18+8e	10+4e	−(18+8e)	260
261	18	−20	−40	−48	−27	−167	187	259	−(3+e)	−(10+4e)	0	7+3e	−(8+4e)	−(9+3e)	4+2e	7+3e	−(17+7e)	−(22+10e)	7+3e	18+8e	−(7+3e)	15+7e	7+3e	−(21+9e)	261
262	·	22	59	−60	−30	126	186	270	0	−(10+4e)	7+3e	3+e	−(5+3e)	−(10+4e)	8+4e	−(1+e)	−(10+4e)	−(25+11e)	21+9e	0	0	22+10e	−(8+4e)	−(14+6e)	262
263	19	23	−59	60	33	146	206	−270	0	10+4e	−(7+3e)	3+e	5+3e	10+4e	−(6+2e)	7+3e	10+4e	25+11e	−(15+7e)	14+6e	3+e	−(25+11e)	11+5e	3+e	263
264	20	24	57	58	36	166	226	267	0	10+4e	7+3e	−(3+e)	5+3e	10+4e	6+2e	−(7+3e)	10+4e	25+11e	15+7e	−(14+6e)	7+3e	−(15+7e)	−(21+9e)	7+3e	264
265	21	·	49	57	11	90	170	267	3+e	7+3e	10+4e	0	7+3e	6+2e	10+4e	−(5+3e)	14+6e	15+7e	25+11e	−(10+4e)	14+6e	−(8+4e)	−(22+10e)	0	265
266	·	·	50	58	42	110	230	267	−(3+e)	7+3e	10+4e	0	1+e	8+4e	10+4e	−(5+3e)	0	21+9e	25+11e	−(10+4e)	3+e	−(11+5e)	−(25+11e)	−(3+e)	266
267	·	·	57	·	258	264	265	266	0	8+4e	8+4e	0	6+2e	8+4e	8+4e	−(6+2e)	8+4e	22+10e	22+10e	−(8+4e)	8+4e	−(14+6e)	−(22+10e)	0	267
268	22	−23	51	59	16	130	−210	270	3+e	−(7+3e)	10+4e	0	−(1+e)	−(8+4e)	10+4e	−(5+3e)	0	−(21+9e)	25+11e	−(10+4e)	7+3e	21+9e	−(15+7e)	−(7+3e)	268
269	·	·	−52	−60	47	−150	190	270	−(3+e)	−(7+3e)	10+4e	0	−(7+3e)	−(6+2e)	10+4e	−(5+3e)	−(14+6e)	−(15+7e)	25+11e	−(10+4e)	−(4+2e)	18+8e	−(18+8e)	−(10+4e)	269
270	·	·	59	·	262	−263	268	269	0	−(8+4e)	8+4e	0	−(6+2e)	−(8+4e)	8+4e	−(6+2e)	−(8+4e)	−(22+10e)	22+10e	−(8+4e)	0	22+10e	−(14+6e)	−(8+4e)	270
271	25	27	37	41	77	93	153	274	7+3e	3+e	0	10+4e	8+4e	−(1+e)	5+3e	10+4e	21+9e	0	10+4e	25+11e	21+9e	−(7+3e)	7+3e	−(15+7e)	271
272	·	·	39	43	78	133	−233	273	7+3e	−(3+e)	0	10+4e	6+2e	−(7+3e)	5+3e	10+4e	15+7e	−(14+6e)	10+4e	25+11e	18+8e	4+2e	10+4e	−(18+8e)	272
273	·	·	41	·	271	272	274	279	8+4e	0	0	8+4e	8+4e	−(6+2e)	6+2e	8+4e	22+10e	−(8+4e)	8+4e	22+10e	22+10e	0	8+4e	−(14+6e)	273
274	·	29	·	·	3	92	132	273	10+4e	0	3+e	7+3e	10+4e	−(5+3e)	7+3e	6+2e	25+11e	−(10+4e)	14+6e	15+7e	25+11e	3+e	3+e	−(11+5e)	274
275	26	−28	38	42	79	113	213	277	−(7+3e)	3+e	0	10+4e	−(6+2e)	7+3e	5+3e	10+4e	−(15+7e)	14+6e	10+4e	25+11e	−(8+4e)	−(14+6e)	0	−(22+10e)	275
276	·	·	−40	−44	80	173	193	277	−(7+3e)	−(3+e)	0	10+4e	−(8+4e)	1+e	5+3e	10+4e	21+9e	0	10+4e	25+11e	−(11+5e)	−(3+e)	3+e	−(25+11e)	276
277	·	·	42	·	275	276	278	−280	−(8+4e)	0	0	8+4e	−(8+4e)	6+2e	6+2e	8+4e	−(22+10e)	8+4e	8+4e	22+10e	−(14+6e)	−(8+4e)	0	−(22+10e)	277
278	·	30		·	−8	112	192	277	−(10+4e)	0	3+e	7+3e	−(10+4e)	5+3e	7+3e	6+2e	−(25+11e)	10+4e	14+6e	15+7e	−(15+7e)	−(7+3e)	−(7+3e)	−(21+9e)	278
279	27	31	41	43	11	152	−232	273	10+4e	0	−(3+e)	7+3e	10+4e	−(5+3e)	1+e	8+4e	25+11e	−(10+4e)	0	21+9e	22+10e	0	14+6e	−(8+4e)	279
280	28	32	−42	44	14	172	−212	−277	10+4e	0	3+e	−(7+3e)	10+4e	−(5+3e)	−(1+e)	−(8+4e)	25+11e	−(10+4e)	0	−(21+9e)	18+8e	10+4e	−(4+2e)	18+8e	280
281	29	32	19	51	282	283	284	290	8+4e	0	8+4e	0	8+4e	−(6+2e)	8+4e	−(6+2e)	22+10e	−(8+4e)	22+10e	−(8+4e)	22+10e	8+4e	−(14+6e)	0	281
282	·	·	·	53	1	96	176	281	10+4e	3+e	7+3e	0	11+5e	−(2+2e)	7+3e	−(4+2e)	28+12e	−(3+e)	18+8e	−(7+3e)	25+11e	3+e	−(11+5e)	3+e	282
283	·	·	51	55	2	136	−216	281	10+4e	−(3+e)	7+3e	0	9+3e	−(8+4e)	7+3e	−(4+2e)	22+10e	−(17+7e)	18+8e	−(7+3e)	22+10e	14+6e	−(8+4e)	0	283
284	·	33	19	51	57	94	134	281	7+3e	0	10+4e	3+e	7+3e	−(4+2e)	11+5e	−(2+2e)	18+8e	−(7+3e)	28+12e	−(3+e)	21+9e	7+3e	−(15+7e)	−(7+3e)	284
285	30	−31	50	−52	286	287	288	−289	−(8+4e)	0	8+4e	0	−(8+4e)	6+2e	8+4e	−(6+2e)	−(22+10e)	8+4e	22+10e	−(8+4e)	−(14+6e)	0	−(22+10e)	−(8+4e)	285
286	·		·	54	−6	116	236	285	−(10+4e)	3+e	7+3e	0	−(9+3e)	8+4e	7+3e	−(4+2e)	−(22+10e)	17+7e	18+8e	−(7+3e)	−(15+7e)	−(7+3e)	−(21+9e)	−(7+3e)	286
287	·	·	−52	−56	−7	−156	196	285	−(10+4e)	−(3+e)	7+3e	0	−(11+5e)	2+2e	7+3e	−(4+2e)	−(28+12e)	3+e	18+8e	−(7+3e)	−(18+8e)	4+2e	−(18+8e)	−(10+4e)	287
288	·	34	50	−52	58	114	194	285	−(7+3e)	0	10+4e	3+e	−(7+3e)	4+2e	11+5e	−(2+2e)	−(18+8e)	7+3e	28+12e	−(3+e)	−(8+4e)	0	−(22+10e)	−(14+6e)	288
289	31	35	−50	52	−59	154	−234	−285	7+3e	0	−(10+4e)	3+e	7+3e	−(4+2e)	−(9+3e)	8+4e	18+8e	−(7+3e)	−(22+10e)	17+7e	11+5e	−(3+e)	25+11e	3+e	289
290	32	36	49	51	60	174	−214	281	7+3e	0	10+4e	−(3+e)	7+3e	−(4+2e)	9+3e	−(8+4e)	18+8e	−(7+3e)	22+10e	−(17+7e)	18+8e	10+4e	−(18+8e)	4+2e	290
291	41	45	53	56	17	98	158	295	10+4e	7+3e	0	3+e	14+6e	2	1+e	3+e	32+14e	8+4e	3+e	7+3e	25+11e	−(11+5e)	3+e	3+e	291
292	42	46	54	−55	−18	118	218	298	−(10+4e)	7+3e	0	3+e	−(6+2e)	12+6e	1+e	3+e	−(18+8e)	28+12e	3+e	7+3e	−(15+7e)	−(21+9e)	−(7+3e)	−(7+3e)	292
293	43	47	−54	55	19	138	−238	−298	10+4e	−(7+3e)	0	3+e	6+2e	−(12+6e)	1+e	3+e	18+8e	−(28+12e)	3+e	7+3e	18+8e	18+8e	10+4e	−(4+2e)	293
294	44	48	53	56	20	178	−198	296	10+4e	7+3e	0	−(3+e)	14+6e	2	−(1+e)	−(3+e)	32+14e	8+4e	−(3+e)	−(7+3e)	22+10e	−(8+4e)	0	14+6e	294
295	45	·	·	·	291	294	296	297	8+4e	8+4e	0	0	14+6e	2+2e	0	0	30+14e	14+6e	0	0	22+10e	−(14+6e)	0	8+4e	295
296	·	·	·	57	37	99	179	295	7+3e	10+4e	3+e	0	12+6e	6+2e	3+e	−(1+e)	28+12e	18+8e	7+3e	−(3+e)	21+9e	−(15+7e)	−(7+3e)	7+3e	296
297	·	·	56	60	38	159	−199	295	7+3e	10+4e	−(3+e)	0	12+6e	6+2e	−(3+e)	1+e	28+12e	18+8e	−(7+3e)	3+e	18+8e	−(18+8e)	4+2e	10+4e	297
298	46	−47	54	−55	292	−293	299	300	−(8+4e)	8+4e	0	0	−(2+2e)	14+6e	0	0	−(14+6e)	30+14e	0	0	−(14+2e)	−(22+10e)	−(8+4e)	0	298
299	·	·	·	58	39	119	239	298	−(7+3e)	10+4e	3+e	0	−2	14+6e	3+e	−(1+e)	−(8+4e)	32+14e	7+3e	−(3+e)	−(8+4e)	−(22+10e)	−(14+6e)	0	299
300	·	·	−55	−59	40	−139	219	298	−(7+3e)	10+4e	−(3+e)	0	−2	14+6e	−(3+e)	1+e	−(8+4e)	32+14e	−(7+3e)	3+e	−(11+5e)	−(25+11e)	−(3+e)	3+e	300

BOEKDRUKKERIJ
de Roever Kröber & Bakels
AMSTERDAM.

VERVOLG VAN HET ONDERZOEK

BETREFFENDE

HET KETONZUUR

AFGELEID VAN

WIJNSTEENZUUR,

EN OVER HET

PARABRANDIGDRUIVENZUUR

DOOR

E. MULDER.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam

(EERSTE SECTIE.)

DEEL II. No. 8.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1894.

VERVOLG VAN HET ONDERZOEK

BETREFFENDE

HET KETONZUUR

AFGELEID VAN

WIJNSTEENZUUR,

EN OVER HET

PARABRANDIGDRUIVENZUUR

DOOR

E. MULDER.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

DEEL II. No. 8.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1894.

VERVOLG VAN HET ONDERZOEK

BETREFFENDE

HET KETONZUUR AFGELEID VAN WIJNSTEENZUUR [1],

EN OVER HET

PARABRANDIGDRUIVENZUUR [2]

DOOR

E. MULDER.

De amorphe baryumverbindingen afgeleid van *oplosbaar* en *onoplosbaar* product kunnen (verdeeld in water, en behandeld met azijnzuur, baryumacetaat, enz.) een *kristallijne* baryumverbinding doen ontstaan, waarover in de eerste plaats zal worden gehandeld.

Kristallijne baryumverbinding van oplosbaar product, met azijnzuur. Deze kan aldus worden verkregen. Oplosbaar product wordt opgelost in water, en deze oplossing eenigen tijd aan zich zelve overgelaten (om de verzeeping der alkalische vloeistof te doen plaats hebben). Daarna wordt de oplossing neêrgeslagen met barytwater in *overmaat*, gefiltreerd, de massa gewasschen, vervolgens (met zoo weinig water mogelijk) van het filtrum gebracht (gebruik makende van een pipette met een daaraan bevestigden caoutchoucbal). Thans wordt langzamerhand *azijnzuur* toegevoegd (van tijd tot tijd schuddende), en dit herhaald, tot zich een *kristallijn* lichaam vertoont, dat gemakkelijk is te onderscheiden van de aanvankelijk *geleiachtige* massa. Ingeval het afzetsel onder den microscoop zich nog niet vertoont als een homogene massa, dan wordt het geheel met een nieuwe hoeveelheid azijnzuur behandeld (gelijk altijd, geacht te wor-

[1]) Zoogenaamd *oplosbaar* en *onoplosbaar* product zijn afgeleid van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl met aethylchloride; zie: Verhand. K. Akad. v. W. Deel I. N⁰. 7, p. 3.

[2]) Deze Verhandeling bevat daarenboven een aanhangsel, betrekking hebbende op *amorph wijnsteenzuur* en *zuringzuur* baryum.

den toegevoegd bij die reeds voorhanden). Wanneer het afzetsel blijkt homogeen te zijn, dan laat men het geheel voor alle zekerheid nog eenigen tijd staan (nu en dan schuddende), om vervolgens te filtreeren en te wasschen. De kristalvorm is die van spheroïden, welke bleken dubbelbrekend te zijn (gebruik maken van gepolariseerd licht). Duidelijkshalve zullen eenige proeven in dien zin gedaan, worden medegedeeld, met opgave tevens van de gewichtsverhoudingen der gebruikte materialen.

I. Er werd uitgegaan van 12 gr. *oplosbaar* product, die werden opgelost in 300 gr. water (men liet het geheel een halven dag staan, om de verzeeping te doen plaats hebben). Vervolgens werden er 720 gr. barytwater bijgevoegd (er was dan baryt in overmaat), en liet men het geheel ongeveer 24 uur staan (van tijd tot tijd schuddende). Dan werd de massa gefiltreerd, gewasschen en daarna het afzetsel (met zoo weinig water mogelijk) afgenomen van het filtrum; en werd er vervolgens 20 gr. *azijnzuur* bijgedaan, na eenige uren opnieuw 20 gr., toen 40 gr. (na 24 uur) en ten slotte nog 64 gr. van dit zuur (na eenige uren), dus te zamen 144 gr.. Het kristallijne afzetsel werd onder den microscoop bekeken, om zeker te zijn, dat de massa homogeen is. En mocht dit laatste het geval zijn, dan laat men het geheel nog eenigen tijd, b.v. twee dagen, staan. Vervolgens werd de massa gefiltreerd, het afzetsel gewasschen, daarna gedaan tusschen filtreerpapier, en ten slotte onder een exsiccator geplaatst, aanvankelijk met zwavelzuur, daarna daarenboven met natrium.

De opbrengst bedroeg 2,5 gr., of berekend op 1 gr. *oplosbaar* product, dan 0,208 gr. aan de *kristallijne* baryumverbinding.

Een hoeveelheid van 0,4918 gr. gaf 0,1731 gr. kooldioxyde en 0,0841 gr. water (de exsiccator bevatte zwavelzuur en natrium), overeenkomende met:

koolstof	9,6	(nader: 9,59 en 1,9).
waterstof	1,9	

Een hoeveelheid van 24 gr. eener andere bereiding leverde 5,016 gr. van dit kristallijne lichaam op (er werd gebruikt 600 gr. water, 1400 gr. barytwater, en in 't geheel 288 gr. azijnzuur). In plaats van azijnzuur kan men salpeterzuur nemen (zie later).

Kristallijne baryumverbinding van oplosbaar product, met baryumacetaat.

II. Een hoeveelheid van 6 gr. *oplosbaar* product werd opgelost in 300 gr. water, en er bij gedaan 360 gr. (verzadigd) barytwater.

De massa werd gefiltreerd en gewasschen, daarna van het filtrum gedaan (met water), en er bijgevoegd 214 gr. van een oplossing van *baryumacetaat* (5 c. c. bevattende 1 gr. van dit lichaam), en vervolgens 50 gr. van een sterkere oplossing (5 c.c. bevattende 1,8 gr. van dit zout). Onder deze omstandigheden laat de aanvankelijk geleiachtige massa een *kristallijne* verbinding terug. Na ongeveer 3 × 24 uur te hebben gestaan, werd gefiltreerd en gewasschen. De opbrengst bedroeg 1,05 gr., of berekend op 1 gr. oplosbaar product 0,175 gr. aan deze kristallijne stof, bij gevolg een weinig minder dan met azijnzuur.

Een hoeveelheid van 0,5437 gr. deze stof gaf 0,1921 gr. kooldioxyde en 0,0925 gr. water, of berekend op 100 gew. d.:

koolstof	9,6	(juister 9,63 en 1,89).
waterstof	1,9	

Kristallijne baryumverbinding afgeleid van onoplosbaar product, met azijnzuur.

I. Een hoeveelheid van 13,6 gr. *onoplosbaar* product werd opgelost in 340 gr. water, en bij de oplossing (na eenigen tijd te hebben gestaan) gedaan 816 gr. barytwater (er is dan baryt in overmaat). Men liet het geheel 5 × 24 uur staan, daarna werd gefiltreerd, het neêrslag gewasschen, vervolgens met een weinig water van het filtrum afgenomen, en achtereenvolgens toegevoegd:

	40	gr.	azijnzuur
den volgenden dag	40	„	„
„ „ „	80	„	„
„ „ „	128	„	„
na twee dagen	80	„	„
„ „ „	80	„	„
gezamentlijk	448	gr.	azijnzuur.

Uitgaande van *onoplosbaar* product, moet dus meer azijnzuur worden genomen, dan *oplosbaar* product vereischt, onder omstandigheden, die genoegzaam dezelfde zijn. Ook dit lichaam kan kristalliseeren in dubbelbrekende spheroïden (evenzoo van microscopische afmeting).

Het kristallijne afzetsel werd overigens behandeld als dat van oplosbaar product (zie vroeger). De opbrengst bedroeg die van 1,58 gr., afkomstig van 13,6 gr. *onoplosbaar* product, en in een andere bereiding 1,326 gr. van 13,8 gr. van dit product; of, berekend op 1 gr. *onoplosbaar* product, gemiddeld 0,11 gr. (derhalve heel wat minder dan *oplosbaar* product oplevert).

In een tweede bereiding werd bij de barytverbinding (na filtreeren en wasschen) 40 gr. *azijnzuur* gedaan; daarna werd gefiltreerd, gewasschen en de massa van het filtrum afgespoten, en er vervolgens op nieuw 40 gr. azijnzuur bijgedaan; ten slotte werden al die bewerkingen nogmaals eénmaal herhaald. Aldus te werk gaande, vertoont zich de kristallijne baryumverbinding, bij gevolg door gebruik te maken van $40 \times 3 = 120$ gr. azijnzuur, in plaats van 442 gr. zooals in de eerste bereiding. Een hoeveelheid van 0,6307 gr. stof gaf 0,2376 gr. kooldioxyde en 0,1033 gr. water, op 100 gew. d. overeenkomende met:

Koolstof	10,3	(juister 10,27 en 1,82).
Waterstof	1,8	

Merkwaardig is de overeenstemming met de *oorspronkelijke* baryum-verbinding (die slechts was gedroogd, dus niet behandeld met azijnzuur [1]). Dit lichaam is amorph, en biedt wat dat betreft, minder waarborg aan van zuiver te zijn (en wel vooral in het geval, dat ons bezighoudt, omdat de massa aanvankelijk geleiachtig is). Men zal, vooral later, zien, dat de *oorspronkelijke* baryumverbinding een geheel ander lichaam moet zijn dan de kristallijne verbinding, daar van de eerste (*tegelijkertijd* met deze kristallijne stof) een ander afgeleide is te bekomen, voorloopig geheeten, „het lichaam in plaatjes" (zie later).

Bij vergelijking van het gehalte aan koolstof (en waterstof) van de kristallijne baryumverbinding, afgeleid van *onoplosbaar* product, met die van *oplosbaar* product, blijkt, dat het koolstofgehalte in de eerste een weinig hooger is. Later zal evenwel genoegzaam duidelijk worden, dat men hier waarschijnlijk met hetzelfde lichaam heeft te doen, en deze kristallijne stof *baryumoxalaat* zou kunnen zijn (maar dit lichaam dan niet volkomen zuiver, niettegenstaande het genoegzaam kleurloos is).

Kristallijne baryumverbinding afgeleid van onoplosbaar product, met azijnzuur baryum. Een hoeveelheid van 3,4 gr. *onoplosbaar* product werd opgelost in 170 gr. water, er bij gedaan 204 gr. barytwater (verzadigd), gefiltreerd, gewasschen en het neêrslag van het filtrum afgenomen. Thans werd er 70 gr. toegevoegd eener oplossing van *baryumacetaat* (5 c.c. bevatten 1,854 gr. van dit zout), volgden 73 gr. en (den volgenden dag) daarenboven 30 gr., zonder dat de

[1] Zie de Verhand. Deel I, N° 7, p. 24.

geleiachtige massa het *kristallijne* lichaam deed ontstaan. Om die reden werd het neêrslag op een filtrum gedaan, andermaal gewasschen en van het filtrum (met water) genomen; en er vervolgens een weinig *zoutzuur* bijgedaan, ten einde de kristallijne verbinding te doen ontstaan, dat bijzonder goed mocht gelukken. Maar de opbrengst liet te wenschen over, en bedroeg niet meer dan 0,26 gr. of 0,08 gr op 1 gr. *onoplosbaar* product.

De kristallijne verbinding nader behandeld. Er werd geen verschil waargenomen tusschen dit lichaam, afgeleid van *oplosbaar* en *onoplosbaar* product, met betrekking tot den kristalvorm en andere eigenschappen. Beide b.v. zijn oplosbaar in verdund zoutzuur, en deze oplossing wordt door barytwater aanvankelijk in *amorphen* staat neêrgeslagen om dan *kristallijn* te worden.

De oplossing der kristallijne baryumverbinding (van oplosbaar product) in verdund zoutzuur, werd geplaatst onder een exsiccator (met zwavelzuur en kalk); het terugblijvende A behandeld met *alcohol*, en de alcoholische oplossing gezet onder een exsiccator. Er bleef een kristallijne massa terug en een vloeibaar gedeelte. Het geheel gaf, behandeld met water een oplossing, waarop een weinig dreef van een *olieachtig* lichaam (zie later). Na te zijn geplaatst geweest onder een exsiccator, en het terugblijvende opnieuw te hebben behandeld met water, werd alles opgelost (zonder dat er wat te zien was van een olieachtige stof); en die oplossing gaf, na geplaatst te zijn geweest onder een exsiccator, een product, dat genoegzaam geheel oploste in *alcohol*. Deze oplossing nu, liet na verdampen een *kristallijne*, *efflorescеerende* massa terug, het voorkomen hebbende van *zuringzuur*.

Wat onopgelost terugbleef van A (zie boven) liet met water een kleine *hoeveelheid* terug eener *kristallijne* stof.

Over de opbrengst van oplosbaar en onoplosbaar product van de kristallijne baryumverbinding. Men vond op 1 gr. oorspronkelijk product (zie p. 4, 5, en 7):

	oplosbaar product:	onoplosbaar product:	
met azijnzuur	0,2	0,11	
met baryumacetaat	0,17	0,08	(zie p. 7).

Oplosbaar product geeft bij gevolg ongeveer de dubbele hoeveelheid der kristallijne stof van die door *onoplosbaar* product voortgebracht. Met 't oog op het chloorgehalte van *oplosbaar* product, zou men eerder het tegendeel kunnen verwacht hebben.

Ten einde een beteren maatstaf te hebben, nam men de oorspron-

kelijke baryumverbinding van *oplosbaar* en *onoplosbaar* product Berekend op 1 gr. der oorspronkelijke stof heeft men [1]:

	van 1 gr. oplosbaar product.	van 1 gr. onoplosbaar product.
opbrengst aan oorspronkelijke baryumverbinding:	0,52 gr.	0,91 gr.

Zoodat men heeft:

	opbrengst aan oorspronkelijke baryumverbinding;	opbrengst aan *kristallijne* baryumverbinding, met *azijnzuur*:
oplosbaar product	0,52	0,2
onoplosbaar „	0,91	0,11.

Kan de kristallijne baryum-verbinding van onoplosbaar product afstammen van een gehalte hiervan aan oplosbaar product. Onoplosbaar product bevat een weinig *chloor*, stel 1,3 proc. [2]) (het kan ook minder bedragen, (zie later p. 22). Laat dit het gevolg zijn van een gehalte aan *oplosbaar* [3]) product (dat gemiddeld 10,5 proc. chloor, bevatte), dan zou men door het gehalte van chloor, kunnen berekenen het gehalte aan *oplosbaar* product (10,5 : 1,3 = 100 : x; x = 12,4 gr.), in gemeld geval dan 12,4 p. c. bedragende, of 12,4 gr. *oplosbaar* product in 100 gr. *onoplosbaar product*, of in 1 gr. *onoplosbaar* product aan *oplosbaar* product 0,124 gr.. Die hoeveelheid *oplosbaar* product zou kunnen voortbrengen 0,0248 gr. aan de *kristallijne* baryum-verbinding (1: 0,124 = 0,2: x; x = 0,0248 gr.), en wel met azijnzuur, terwijl werd gevonden 0,11 gr. (zie p. 5). Bijgevolg moet worden aangenomen, dat *onoplosbaar* product als zoodanig (dan verondersteld vrij te zijn van *oplosbaar* product) van de *kristallijne* baryumverbinding kan doen ontstaan.

Omzetting der kristallijne baryumverbinding van oplosbaar product in zuringzuur zilver. De verbinding werd in water verdeeld, vervolgens opgelost met een weinig salpeterzuur, en (na filtratie) neêrgeslagen met zilvernitraat.

Een hoeveelheid van 2,251 gr. der kristallijne baryumverbinding gaf 1,85 gr. van het zilverzout.

---

[1]) Zie de voorgaande Verhandeling: Verhand. Kon. Akad. v. W. Deel I. N°. 7 (Eerste Sectie) p. 23, 25.

[2]) Zie Verslagen en Mededeelingen der K. Akad. v. W. Afd. Natuurkunde, 3de Reeks, Deel VIII, p. 191.

[3]) l. c. p. 190.

1,2512 gr. dezer laatste stof gaf 0,3564 gr. kooldioxyde en 0,0184 gr. water, of op 100 gew.-d.:

			Ag. 0, CO. CO. O. Ag. eischt:
Koolstof	7,8	(juister	7,9
Waterstof	0,2	7,76 en 0,16)	0.

Dit lichaam is derhalve te beschouwen als zijnde *zuringzuur zilver.*

Over het olievormig lichaam van pag. 7. Het is zeer wel mogelijk, dat er eenig (neutraal) zuringzuur aethyl ontstaat, als gevolg der reactie van alkohol op *zuringzuur.*

Omzetting der kristallijne baryumverbinding van onoplosbaar product in zuringzuur zilver. Dezelfde weg werd gevolgd.

Een hoeveelheid van 1,326 gr. den kristallijne stof gaf 1,08 gr. van het zilverzout.

1,0842 gr. van dit laatste lichaam gaf 0,3124 gr. kooldioxyde en 0,0169 gr. water, of berekend op 100 gew.-d.

			Ag 0. CO. CO. O Ag eischt:
Koolstof	7,8	(juister	7,9
Waterstof	0,2	7,85 en 0,17)	0.

Dit lichaam is bij gevolg eveneens *zuringzuur zilver.*

Vorming van zuringzuur zilver met oplosbaar product, langs een meer directen weg. Een hoeveelheid van 5 gr. oplosbaar product werd in water opgelost, neêrgeslagen met *barytwater* in overmaat (als gewoonlijk), gefiltreerd (en gewasschen), en vervolgens de massa van het filtrum (met water) genomen. Na behandeling met verdund *salpeterzuur*, vertoont zich weldra een *kristallijn* afzetsel. Dit laatste werd opgelost, door bij het geheel nog eenige hoeveelheid van dit verdunde zuur te voegen, en gefiltreerd (ten einde een volkomen heldere oplossing te hebben). Eindelijk werd neêrgeslagen met *zilvernitraat*, dat *zuringzuur zilver* deed ontstaan.

De amorphe baryumverbindingen, afgeleid van oplosbaar en onoplosbaar product, zijn deze mengsels? Met den microscoop is niets waar te nemen van eenige kristallijne stof; alleen vertoont zich nu en dan een kleine hoeveelheid van een kristallijn afzetsel tegen den wand van het vat (indien, na neêrslaan der waterige oplossing van *oplosbaar* product met barytwater in overmaat, de massa eenigen tijd heeft gestaan). Maar daaruit volgt niet, dat genoemde baryumverbindingen geen mengsels zijn van amorphe verbindingen, b.v. te scheiden met azijnzuur, baryumacetaat, enz. (zie vroeger), door een der b.v. twee voorhanden stoffen (*verondersteld* aanwezig te zijn) in oplossing

te brengen, en de andere verbinding te doen overgaan van den amorphen (colloïdalen) vorm in den kristallijnen staat.

Men heeft een poging gewaagd, om een dergelijk mengsel na te bootsen, uitgaande van brandigdruivenzuur en zuringzuur met barytwater, zooals later zal worden medegedeeld (zie het Aanhangsel dezer Verhandeling); maar dit is slechts ten deele mogen gelukken, in zooverre, als men in de massa duidelijk kristalletjes van baryumoxalaat onder den microscoop kan zien; dit belet echter niet, dat de grootste hoeveelheid van dit zout een langeren of korteren tijd in oplossing kan volharden in den colloïdalen toestand.

Opmerkingswaardig is, dat de *oorsponkelijke* baryumverbinding van *onoplosbaar* product (als altijd versch neêrgeslagen en in water verdeeld) het *kristallijne* lichaam *niet* geeft met *baryumacetaat.* Maar men moet bij de massa daarna (altijd na deze eerst gewasschen en van het filtrum met water te hebben verwijderd) een weinig zoutzuur voegen, ten einde dit te zien gevormd worden. Het overeenkomstige afgeleide van *oplosbaar* product gedraagt zich anders, en geeft gemelde *kristallijne* verbinding met baryumacetaat zonder bezwaar (zie vroeger).

Een ontleding eener baryumverbinding met baryumacetaat, zooals dit zou plaats hebben met de oorspronkelijke baryumverbinding van *oplosbaar* product, heeft wel iets bevreemdends. Ook is gebleken, dat deze reactie niet gelukt met *onoplosbaar* product (zie boven). Bijgevolg kan het besluit luiden, dat deze (oorspronkelijke) baryumverbindingen (afgeleid van *oplosbaar* en *onoplosbaar* product), *mengsels* zouden kunnen zijn; een der samenstellende stoffen is in dit geval waarschijnlijk *baryumoxalaat* (zie pag. 8 en 9 de omzetting in *zuringzuur zilver*), en een ander samenstellende verbinding, degene, waarover weldra zal worden gehandeld.

Samenstelling der kristallijne verbinding afgeleid van oplosbaar en onoplosbaar product, vergeleken met die van zuringzuur baryum. Er was gevonden:

	oplosbaar product.	onoplosbaar product.	$C_2\,O_4\,Ba + H_2\,O$ eischt.
koolstof	9,6	10,3	9,8
waterstof	1,9	1,8	0,8.

Ten contrôle is zuringzuur baryum gemaakt en geanalyseerd (na te hebben gestaan onder een exsiccator met zwavelzuur en natrium). Een hoeveelheid van 1,1828 gr. stof gaf 0,4224 gr. kooldioxyde en 0,097 gr. water, of op 100 gew. d.:

koolstof	9,7
waterstof	0,9.

Vooralsnog kan men dit verschil niet verklaren, dat vooral met betrekking tot de waterstof nog al aanmerkelijk is. Men kan tot nogtoe niet over een genoegzame hoeveelheid stof beschikken, om dit na te gaan. Mogelijk is, dat men hier te doen heeft met een dubbelzout van zuringzuur en mierenzuur baryum, want er is zuringzuur uit afgezonderd [1]). De opbrengst van zuringzuur zilver beantwoordt ook niet aan de theoretische hoeveelheid, ingeval de oorspronkelijke stof was zuringzuur baryum (zie pag. 8 en 9), want het mol.-gew. van $C_2 O_4 Ba + H_2 O$ is $= 242{,}54$, en dat van zuringzuur zilver $= 303{,}1$.

Over een verbinding, geheeten het lichaam in plaatjes, afgescheiden uit de moederloog der kristallijne baryumverbinding, afgeleid van oplosbaar product met azijnzuur. De moederloog werd geplaatst onder een exsiccator (met zwavelzuur en kalk, om de dampen van azijnzuur te doen opnemen). Het terugblijvende werd behandeld met water, waarbij een schijnbaar *amorph* lichaam terugbleef, optredende in den vorm van (zeer weinig gekleurde) plaatjes.

I. Een hoeveelheid van 0,5217 gr. stof gaf 0,2818 gr. kooldioxyde en 0,1138 gr. water;

een hoeveelheid van 0,3679 gr. stof gaf (na gloeiing en behandeling met koolzuren ammoniak) 0,2326 gr. baryumcarbonaat, bevattende 0,1618 gr. baryum of 44 pCt.. Hierbij werd gebruik gemaakt van een toestel, die dient om de fout te ontgaan, veroorzaakt door het *zwaveligzuur* der steenkolen-gasvlam (zie later hierover een speciale Mededeeling). Wendt men dezen toestel niet aan, en volgt overigens denzelfden weg, dan ontstaat een merkbare fout; zoo gaf 0,3028 gr. stof 0,194 gr. baryumcarbonaat, bevattende 0,13497 gr. baryum of 44,6 pCt., (juister: 44,56) dus 0,6 pCt. te veel, als gevolg van een gehalte aan baryumsulphaat).

II. Van een andere bereiding gaf 0,7465 gr. stof 0,4103 gr. kooldioxyde en 0,1484 gr. water.

III. *a*. Een hoeveelheid van 0,3485 gr. stof, afkomstig van een andere bereiding, verhit in een droogen luchtstroom tot 130°, gaf 0,1872 gr. kooldioxyde en 0,0618 gr. water;

0,2996 gr. van dezelfde stof gaf 0,2405 gr. baryumsulfaat (na aanvankelijke oplossing in water met eenig zoutzuur, en filtratie van

---

[1]) Zie deze Verhandeling pag. 7.

een uiterst kleine hoeveelheid van eenig lichaam in suspensie, slechts bedragende na gloeiing 0,0004 gr.), bevattende 0,14143 gr. baryum.

b. De hoeveelheid stof die nog overbleef van de laatste bereiding, werd aan de vochtige lucht geplaatst tot het gewicht constant was, na eerst onder een exsiccator te hebben gestaan (met SO_4 H_2 en Na), en nam 0,0577 gr. in gewicht toe (of 1,9 pc.). Hiervan gaf 0,3709 gr. stof 0,1743 gr. kooldioxyde en 0,0851 gr. water; en 0,3399 gr. stof gaf (opgelost in water met verdund zoutzuur en neêrgeslagen met zwavelzuur) 0,2316 gr. baryumsulfaat, beantwoordende aan 0,1362 gr. baryum; 0,4353 gr. leverde op 0,3086 gr. baryumsulfaat, of 0,18148 gr. baryum; 0,7453 gr. gaf 0,5249 gr. baryumsulfaat, of 0,30868 gr. baryum.

Berekend op 100 gew. d. komt dit overeen met:

	I. (exsic.)	II (exsic.)	III *a.* (130°)	*b.* (vochtige lucht).
koolstof	14,7	15,0	14,6	12,8
waterstof	2,4	2,2	2,0	2,5
baryum	44	—	47,2	41,1 (gemiddeld).

Kristalwater. De stof werd geplaatst *onder een exsiccator* (met zwavelzuur en natrium), na eerst te zijn geplaatst geweest aan de lucht tusschen filtreerpapier. Verhit in een droogen luchtstroom, nam een hoeveelheid van 0,3154 gr. stof in gewicht af:

Tijd in uren	Temperatuur	Verandering in gewicht
½	100°	0,0101 gr.
„	110°	0,00039 „
1	105°—110°	0,0009 „
1	110°—115°	0,0005 „
1	115°—120°	0,0003 „
1	125°—130°	0,0001 „
	Totaal	0,0158 gr.

of 5 pCt., dat met de 1,9 pCt. van vroeger dus geeft: $1{,}9 + 5 = 6{,}9$ pCt. kristalwater.

In een andere proef verloor 0,4269 gr. stof (ongeveer 4 uur) verhit tot 130° in gewicht 0,0167 pCt. of 3,9 pCt.; en in nog een andere proef 0,1952 gr. stof (ongeveer 4 uur verhit) bij 100°—120° in gewicht 0,0119 gr. of 6,09 pCt. Hierbij is in aanmerking te nemen, dat de stof tamelijk hygroscopisch is.

Nemen wij voor het gehalte aan baryum van het lichaam in plaatjes (bevrijd van het kristalwater) 47,2, en voor dat van het water 6,9 pCt. (zijnde 5 pCt. het gemiddelde van het water door de stof afgegeven bij verhitten), dan vindt men berekend op Ba =

136,8 (47,2: 136,8 = 6,9:x) 19,9 d. water in plaats van 17,96 = H_2O, bij gevolg ongeveer 1 aq.. Het is mogelijk, dat er gedeeltelijke ontleding intreedt bij verhitting der stof.

Berekent men de verhouding tusschen baryum en koolstof, uitgaande b.v. van de analyse van bereiding I, zoo vindt men op 41,1 d. baryum 13,4 d. koolstof (in plaats van 12,8 met bereiding III gevonden).

Opbrengst van het lichaam in plaatjes. Een hoeveelheid van 1 gr. *oplosbaar* product bracht voort 0,136 gr. van het lichaam in plaatjes, zooals het gaf 0,52 gr. aan de oorspronkelijke baryumverbinding en 0,2 gr. aan de eerste kristallijne baryumverbinding. Derhalve zou er een verlies zijn, berekend op de aanvankelijke baryumverbinding (van 0,52—0,2 = 0,32 gr.) 0,32—0,136 = 0,184 gr.. Gemelde proef was in werkelijkheid genomen met 6 gr. oplosbaar product, dat 0,817 gr. gaf aan het lichaam in plaatjes (dus 0,136 gr. op 1 gr., als boven werd gezegd).

In een andere proef gaven 12 gr. oplosbaar product 1,23 gr. aan het lichaam in plaatjes of 0,102 gr. op 1 gr. oplosbaar product. Het verschil is vrij groot, maar in zooverre te verklaren, als het lichaam in plaatjes een weinig oplosbaar is in water, en een onbepaalde hoeveelheid water werd genomen bij het afzonderen. Een andere proef gaf van 36 gr. oplosbaar product (III) 3.958 gr. van het lichaam in plaatjes of 0,109 gr. op 1 gr. oplosbaar product.

Reacties met de waterige oplossing van het lichaam in plaatjes, afgeleid van oplosbaar product. Na te hebben gestaan met water, heeft men een oplossing, die een amorph neêrslag geeft met zilvernitraat en (neutraal) loodacetaat. Later zal dit onderwerp nader worden besproken (zie over het lichaam in plaatjes afgeleid van *on*-oplosbaar product). Alleen voege men er nog aan toe; dat gezegd neêrslag met zilvernitraat bij verwarming een *zilverspiegel* doet ontstaan (zonder aanvankelijke toevoeging van ammoniak), ten einde het zuur in questie reeds een weinig te kenmerken.

Vergelijking der kristallijne baryumverbinding, tegelijk optredende met het lichaam in plaatjes, met dit laatste en de oorspronkelijke baryumverbinding, afgeleid van oplosbaar product. Daar het gehalte aan koolstof der genoemde kristallijne verbinding lager is dan dat der oorspronkelijke baryumverbinding, was het vrij waarschijnlijk, dat het gehalte aan koolstof van het lichaam in plaatjes betrekkelijk hooger zou wezen (altijd verondersteld, dat deze twee stoffen [1]) de

---

[1]) Zie Verhand. Kon. Akad. v. W. (Eerste Sectie) Deel I. N°. 7. p. 26. (zie deze Verhandeling p. 4, 7 en 12 wat betreft de samenstelling dezer twee stoffen).

hoofdontledingsproducten zijn). En inderdaad is dit wel alzoo, want men had voor de gemiddelde samenstelling der oorspronkelijke barymverbinding gevonden:

	oplosbaar product:
koolstof	12,2
waterstof	2,0.

Over het lichaam optredende in plaatjes, afgezonderd uit de moederloog der kristallijne baryumverbinding, van onoplosbaar product. De weg die ter afscheiding werd gevolgd, is reeds vroeger medegedeeld (zie deze Verhandeling p. 11). De moedervloeistof werd evenzoo onder een exsiccator geplaatst (met zwavelzuur en kalk).

I. Een hoeveelheid van 0,4047 gr. stof gaf 0,2577 gr. baryumcarbonaat, terwijl werd gegloeid (en behandeld met koolzuren ammoniak) gebruik makende van een toestel ingericht ter ontduiking der bron van fouten, gelegen in het zwaveldioxyde der vlam van steenkolengas. Deze hoeveelheid baryumcarbonaat bevat 0,17926 gr. baryum.

Een hoeveelheid van 0,6002 gr. stof leverde op 0,3095 gr. kooldioxyde en 0,1165 gr. water. Berekend op 100 gew. d. stemt dit overeen met:

koolstof	14,1
waterstof	2,2
baryum	44,3.

De uitkomst van analyse is dus zoo ongeveer dezelfde als bij het lichaam in plaatjes van *oplosbaar* product, behalve het betrekkelijk nog al grOote verschil in koolstofgehalte. Het laatste product was een weinig meer gekleurd.

II. In een andere bereiding, uitgaande van 27,4 gr. *onoplosbaar* product (eerst op de gewone wijze behandeld met baryt, maar daarna het neêrslag achtereenvolgens behandeld met azijnzuur en water), heeft zich uit de azijnzure oplossing ongeveer 1,4 gr. afgezet van een kristallijne stof, die optrad in *spheroïden.* Het lichaam werd geplaatst onder een exsiccator (met zwavelzuur en natrium), vervolgens geanalyseerd.

0,4765 gr. deze stof gaf 0,2535 gr. kooldioxyde en 0,106 gr. water.

a. 0,3043 gr. gaf 0,197 gr. baryumcarbonaat (de bepaling was gedaan als die van de vorige), of 0,13704 gr. baryum. Berekend op 100 gew. d. komt dit overeen met 45,0;

b. 0,6704 gr. stof gaf 0,505 gr. baryumsulphaat (na oplossen in water met verdund zoutzuur en neêrslaan met zwavelzuur), bevattende 0,29698 gr. de baryum of 44,3 pCt. Er bleef aanvankelijk zeer weinig onopgelost, dat namelijk bij gloeien gaf 0,0023 gr. baryumcarbonaat, bevattende 0,0016 gr. baryum (of 0,2 pCt.), alles te zamen 44,5 pCt. baryum. Op 100 gew. d. derhalve

koolstof	14,5
waterstof	2,5
baryum	*a.* 45,0, *b.* 44,5.

Geplaatst aan de lucht, werd 1,2 pCt. aan water opgenomen.

Bijgevolg is het meer dan waarschijnlijk, dat het lichaam in plaatjes eveneens is gekristalliseerd, en tevens in spheroïden, maar deze laatste zoo klein, dat ze zelfs onder een microscoop niet waarneembaar zijn; en tot plaatjes vereenigd. Ook ziet men nu en dan zeer kleine spheroïden op de plaatjes.

III. Wordt de waterige oplossing van het lichaam in plaatjes (zijnde afgeleid van onoplosbaar product) met alkohol neêrgeslagen, dan ontstaat een *vlokkig* afzetsel. Gedroogd onder een exsiccator (met zwavelzuur en natrium) gaf een hoeveelheid van 0,3445 gr. stof 0,2261 gr. baryumcarbonaat (als vroeger werd zorg gedragen, om de bron van fouten, gelegen in het gehalte van zwaveldioxyde der gasvlam, te ontgaan), overeenkomende met 0,15728 gr. baryum, of 45,6 pCt. baryum.

De uitkomsten der analyse van het lichaam in plaatjes afgeleid van *onoplosbaar* product zijn bijgevolg:

	I. (exsic.)	II. (goed gekristalliseerd; exsic.)	III. (neêrgeslagen met alkohol; exsic.)
Koolstof	14,1	14,5	—
Waterstof	2,2	2,5	—
Baryum	44,3	*a.* 45,0, *b.* 44,5	45,6.

Zie de uitkomsten der analyse van het lichaam in plaatjes van *oplosbaar* product, pag. 12.

Samenstelling van het lichaam in plaatjes van oplosbaar en onoplosbaar product. Bij vergelijking der analytische uitkomsten, is men een weinig getroffen door de kleine overmaat aan baryum bij berekening van koolstof en baryum in de verhouding van C_4 en Ba, zooals uit het volgende kan blijken (in verband met de analytische gegevens):

14 gew.-d. koolstof vorderen dan 40 gew.-d. baryum.
15 „ „ „ „ „ 42,8 „ „ „

Alhoewel de verhouding van C_4 en Ba verre is van bewezen te zijn, wordt deze toch waarschijnlijk uit de analysen; en men vraagt zich af, of onder den invloed van water ook soms wat ontstaat van een basische verbinding. In ieder geval komt de wijze, waarop het lichaam in plaatjes zich verhoudt tegenover water, in dit opzicht wel eenigszins verdacht voor (zie wat later).

Opbrengst van onoplosbaar product aan het lichaam in plaatjes. Een hoeveelheid van 13,6 gr. onoplosbaar product leverde op 4,34 gr. aan het lichaam in plaatjes, of op 1 gr. een hoeveelheid van 0,319 gr.. De hoeveelheid water gebruikt bij de zuivering was wel geringer dan die bij het werken met oplosbaar product, dat evenwel niet zulk een overwegenden invloed zal gehad hebben. De opbrengst aan het lichaam in plaatjes was geringer bij het volgen der methode van pag. 14, toe te schrijven aan de betrekkelijk grootere hoeveelheid water gebruikt. De opbrengst bedroeg in 't geheel (zie pag. 14): 1,4 + 2,1 = 3,5 gr., of 0,12 gr. op 1 gr. onoplosbaar product.

Samenstelling van het lichaam in plaatjes en de oorspronkelijke baryumverbinding. Het gemiddelde der analysen van dit laatste lichaam is: [1])

Koolstof	10,3
Waterstof	1,8

bij gevolg overeenkomende, wel toevalligerwijze, met de samenstelling gevonden voor de kristallijne baryumverbinding (tegelijkertijd ontstaande met de oplossing van het lichaam in plaatjes; zie pag. 6 dezer Verhandeling).

Het lichaam in plaatjes tegenover water; en over eenige reacties der waterige oplossing van het lichaam in plaatjes van oplosbaar en onoplosbaar product. Laat men het lichaam in plaatjes eenige dagen staan met water, dan lost er een weinig van op. De oplossing geeft met alkohol een *vlokkig* afzetsel (dat zelfs na eenigen tijd niets kristallijns vertoont onder den microscoop). Bij verhitten met water wordt het lichaam in plaatjes, maar 't schijnt, betrekkelijk niet meer opgelost. Het lichaam in plaatjes van *onoplosbaar* product gaf zoo den indruk van oplosbaarder te zijn in water dan dat van *oplosbaar*

---

[1]) Verhand d. Kon, Akad. v. W. (Eerste Sectie), Deel I, No. 7, p. 24.

product (van onoplosbaar product ongeveer 0,2 gr. in 100 c.c. water; de oplosbaarheid is dus in ieder geval gering). Ook is het lichaam in plaatjes niet geheel oplosbaar (bij behandeling achtereenvolgens met eenzelfde hoeveelheid water).

De waterige oplossing wordt neêrgeslagen met zilvernitraat en neutraal loodacetaat, welke neêrslagen amorph zijn. Het neêrslag met zilvernitraat (*niet* in overmaat) bevat behalve zilver ook baryum (in zeer merkbare hoeveelheid). Verhit met water, lost gemelde zilververbinding op, om bij langer verhitten (zonder toevoeging van ammoniak) een *zilverspiegel* te geven.

De waterige oplossing van het baryumzout wordt neêrgeslagen door barytwater (voor het calciumzout tegenover kalkwater geacht te zijn een kenmerkende reactie voor glyoxylzuur).

Wordt bij de waterige oplossing van het lichaam in plaatjes cuprisulfaat gedaan, dan ontstaat baryumsulfaat, en blijft *in oplossing een koperzout* (meer of min blauw gekleurd), gevende met eenige bijtende soda een *azuurblauwe* oplossing. Wordt deze laatste verhit, dan vormt zich een onoplosbaar lichaam met *roodbruine* kleur, terwijl de vloeistof een meer of min gele kleur kan aannemen (er heeft bij gevolg ontleding plaats).

Het lichaam in plaatjes verhit bij ongeveer 120°. Een hoeveelheid van 0,1952 gr. dezer stof (afgeleid van oplosbaar product) werd bij verwarming tot ongeveer 120° herleid tot 0,1833 gr.. Bij de massa werd water gedaan, en vervolgens verdund salpeterzuur ter oplossing; er werd gefiltreerd ter verwijdering eener zeer geringe hoeveelheid eener stof die onopgelost bleef, en ten slotte zilvernitraat toegevoegd. Er werd geen neêrslag gevormd, en evenmin na plaatsing onder een exsiccator (met zwavelzuur en calciumoxyde). Er was dus noch zuringzuur aanwezig, noch zuringzuur gevormd.

Ferrichloride tegenover het lichaam in plaatjes en de kristallijne stof, tegelijker tijd gevormd. Het is niet zonder belang om te weten, dat deze twee stoffen *geen* verkleuring geven met ferrichloride, zooals dit wel het geval is met de *oorspronkelijke* baryumverbinding, waarvan deze twee stoffen zijn afgeleid. Wat betreft het lichaam in plaatjes, zoo zou men geneigd kunnen zijn, om hierin te zien glyoxylzuur baryum of een dubbelzout hiervan met glycolzuur baryum; maar, zooals zoo straks bleek, werd *geen* zuringzuur gevonden bij verhitten van het lichaam in plaatjes tot 120° (gelijk het glyoxylzuur baryum doet, naar DEBUS [1]).

---

[1]) Ann. Ch. Ph. Bd. 110. S. 325.

Over het zuur in vrijen staat van het lichaam in plaatjes, afgeleid van oplosbaar product. Ongeveer 0,2 gr. van het lichaam in plaatjes (bereiding III) werd verdeeld in water en eenig verdund zoutzuur bij gedaan ter oplossing, gefiltreerd van een uiterst kleine hoeveelheid onopgelost gebleven stof, en neêrgeslagen met een getitreerde oplossing van zwavelzuur. Vervolgens werd gefiltreerd, en het filtraat geplaatst onder een exsiccator (met zwavelzuur en calciumoxyde); er bleef dan terug van een kristallijne stof doortrokken met een halfvaste massa, die met aether (abs.) werd behandeld, waardoor weinig verandering intrad, aangezien de aether bijkans niets opnam (zooals bleek na verdampen). Opgelost in water, kristalliseerde een stof in prisma's uit, maar het geheel was toch niet vast. Een kleine hoeveelheid der massa tusschen papier gedaan gaf van de gekristalliseerde stof in meer zuiveren staat, die *niet* beneden 100° scheen te smelten, en bijkans onoplosbaar is in abs. aether. Hieruit volgt wel, dat dit lichaam *geen glucolzuur* is. Verhit met water ging blijkbaar niets over, en dus schijnt geen glyoxylzuur aanwezig te zijn. Ook liet de aether bij de proef van zoo even bij verdampen niets over van een kristallijne stof, dat wijst op de afwezigheid van *zuringzuur* (dit zuur is namelijk tamelijk oplosbaar in abs. aether).

Over het bestaan eener verbinding, afgeleid van oplosbaar product, dat zuringzuur en het lichaam in plaatjes doet ontstaan. Een hoeveelheid van 1 gr. van *oplosbaar* product werd opgelost in 10 gr. water; na te hebben gestaan, werd er een weinig *salpeterzuur* bij gedaan, alleen om de oplossing *zwak* zuur te hebben (en dat met het doel om mogelijk aanwezig zuringzuur, later te doen neêrslaan). De oplossing werd behandeld met *zilvernitraat* (in geringe overmaat). Na filtratie werd neêrgeslagen met een weinig eener oplossing van *chloornatrium*, en na filtratie neêrgeslagen met (60 gr.) *barytwater* (als naar gewoonte, maar dan zonder gebruik te maken van zilvernitraat). De massa werd (als vroeger) gefiltreerd, gewasschen, met eenig water van het filtrum afgenomen, en er vervolgens 2 gr. *azijnzuur* aan toegevoegd (als vroeger). Het *kristallijne* lichaam werd ook thans gevormd (er had zich blijkbaar van dezelfde stof een weinig afgezet tegen den wand van het vat, na toevoeging van het barytwater), bij gevolg gebruik makende van een *kleinere* hoeveelheid zuur, dan vroeger (zonder zilvernitraat). Na oplossing in verdund salpeterzuur, geeft deze kristallijne stof bij neêrslaan met zilvernitraat, *zuringzuur zilver*.

In de proef, die volgt, werd *salpeterzuur* genomen (in plaats van azijnzuur), terwijl overigens op gelijke wijze werd te werk gegaan. Ook onder deze omstandigheden zet zich een *kristallijn* lichaam af. De

geheele massa (afzetsel en moedervloeistof) werd toen in verdund salpeterzuur opgelost (van het zuur werd niet meer genomen dan noodig was), en de oplossing neêrgeslagen met *zilvernitraat*. Aldus te werk gaande, gaf 2,0178 gr. *oplosbaar* product 0,332 gr. *zuringzuur zilver*.

Volgens gegevens vroeger medegedeeld (zie p. 8) gaf 1 gr. *oplosbaar* product 0,2 gr. der kristallijne baryumverbinding; en 2,251 gr. dezer laatste stof gaf 1,85 gr. zuringzuur zilver, of 0,16 gr. op 0,2 gr. der kristallijne baryumverbinding (afgeleid van 1 gr. *oplosbaar* product), overeenstemmende met de boven aangehaalde proef. Hieruit volgt met tamelijk veel waarschijnlijkheid, dat zilvernitraat *geen* neêrslag geeft van zuringzuur zilver met de oplossing van *oplosbaar* product, met salpeterzuur slechts zwak zuur gemaakt.

Werd de waterige *oplossing* van *oplosbaar* product, na zwak zuur te zijn gemaakt met salpeterzuur, neêrgeslagen met zilvernitraat, dan werd vroeger [1]) een *chloor*gehalte verkregen genoegzaam gelijk aan dat, bij het volgen der methode met *kalk* verkregen. Men vond namelijk in beide gevallen 10,7 pCt. chloor.

De waterige oplossing van *oplosbaar* product, zuur gemaakt met een weinig azijnzuur, wordt ook *niet* neêrgeslagen met *baryumacetaat* [2]).

Het is duidelijk (om terug te keeren tot het vorige geval), dat de aanwezigheid van zuringzuur zilver, dan vermengd met chloorzilver, zich gemakkelijk zou hebben doen kennen. Een hoeveelheid namelijk van 1 gr. *oplosbaar* product geeft 0,2 gr. aan de kristallijne baryumverbinding (zie p. 8), aanvankelijk gevormd, en bijgevolg 1,1101 gr. oplosbaar product (genomen voor de chloorbepaling langs den natten weg, zie boven) 0,222 gr. aan die kristallijne stof, die op hare beurt geeft 0,18 gr. zuringzuur zilver (want 2,251 gr. geeft 1,85 gr. zuringzuur zilver, zie pag. 8), overeenstemmende met 0,12 gr. *zilver* na gloeiing; en deze hoeveelheid, vermengd met het chloorzilver en als chloorzilver in rekening gebracht, zou een chloorgehalte hebben gegeven van 13,3 pCt. in plaats van 10,7 pCt., zooals werd gevonden (1,1101 gr. oplosbaar product gaf 0,48 gr. neêrslag, gehouden voor chloorzilver; met kalk werd betrekkelijk genoegzaam dezelfde hoeveelheid erlangd).

Met 't oog op de feiten, waarover men tot dusverre kan beschikken (zie later), moet men dus *zuringzuur* beschouwen als een *ont-*

---

1) Versl. en Med. d. Kon. Adad. v. W. Afd. Natuurkunde Deel VIII, 3de Reeks, p. 188 (1890).

2) l. c. T. 1. N°. 7 (Eerste Sectie) p. 29 (1893).

ledingsproduct van het voorgaande zuur (zijnde dit het *eerste* ontledingsproduct door inwerking van baryt op *oplosbaar* en onoplosbaar product in waterige oplossing) in verbinding met baryum, onder den invloed van *azijnzuur* (salpeterzuur, of baryumacetaat). Heeft men dit aangenomen, dan moet men wel, tenminste vooralsnog, de stabiliteit van dit zuur als betrekkelijk gering beschouwen, hetgeen vooral daaruit zou volgen (altijd uitgaande van deze veronderstelling), dat dit zuur zelfs zou ontleed worden door baryumacetaat (zie pag. 6). Het zuur, boven, het *eerste* ontledingsproduct geheeten (met betrekking tot de inwerking van baryt), kan op zijne beurt een ontledingsproduct zijn van het *zuur van oplosbaar* (en onoplosbaar) *product* (steeds in de veronderstelling, dat men hier niet heeft te doen met een mengsel van stoffen).

Over een methode, gevolgd ter afzondering der verbinding, afgeleid van oplosbaar (en onoplosbaar) product, en moederstoffe der kristallijne baryum-verbinding (die zuringzuur geeft) en van het lichaam in plaatjes. Oplosbaar product. Men heeft *verondersteld*, dat deze moederstoffe werkelijk bestaat, wat trouwens nog te bewijzen is (zie zooeven). Eerst werden daartoe pogingen gedaan met *neutraal* en *basisch* azijnzuur lood, uitgaande van een waterige oplossing van *oplosbaar* product (die eenigen tijd had gestaan ter genoegzame verzeeping). Een dergelijke oplossing wordt slechts ten deele neêrgeslagen met neutraal azijnzuur lood, reden waarom men gebruik maakte van *basisch* acetaat, na evenwel de oplossing eerst te hebben gezuiverd van chloor (met zilvernitraat). Onder deze omstandigheden werd een neêrslag gevormd met basisch acetaat, dat werd *gekleurd* onder den invloed van het *licht.* Maar, zooals weldra zal blijken, gelukte het, om de vereischte omstandigheden te treffen. Zoolang dit laatste nog niet het geval was, trachtte men het *chloor* te verwijderen door gedeeltelijk neêrslaan achtereenvolgens met *basisch* azijnzuur lood, dat echter mislukte (het chloor bevond zich namelijk even goed in het gepraecipiteerde als in oplossing). Men keerde bij gevolg terug tot de eerste methode, door het *chloor* te verwijderen, thans met een *getitreerde* oplossing van zilvernitraat, tot grondslag nemende het gehalte van chloor van *oplosbaar* product. De waterige oplossing van dit lichaam was, na eenige dagen te hebben gestaan, zwak zuur gemaakt met salpeterzuur, alvorens met zilvernitraat te worden neêrgeslagen. De massa werd na filtratie (het filtraat was dan vrij van chloor) neêrgeslagen met *basisch* azijnzuur lood, daarna gefiltreerd, gewasschen, de massa van het filtrum afgenomen (met eenig water), en vervolgens opgelost in verdund salpeterzuur, waarbij een weinig terugbleef van een *kristal-*

lijne stof, zonder twijfel overeenkomstig met de kristallijne baryumverbinding, waarvan vroeger melding werd gemaakt (zie b.v. p. 7). Door het filtraat andermaal neêrteslaan met *basisch* azijnzuur lood enz. (zie boven), werd een nieuwe kleine hoeveelheid dezer kristallijne stof verkregen. Deze bewerkingen herhalende, werd er ten slotte geen kristallijne afzetsel meer gevormd.

In een volgende proef werd eerst neêrgeslagen met *neutraal* azijnzuur lood, en het filtraat met *basisch* azijnzuur lood, hopende aldus dadelijk het lichaam te elimineeren, dat gemelde kristallijne verbinding geeft. De twee neêrslagen afzonderlijk opgelost in verdund salpeterzuur, gaven beiden een weinig van dezelfde *kristallijne* verbinding. Het gefiltreerde vocht werd neêrgeslagen met *basisch* en *neutraal* azijnzuur lood, en wel afwisselend met basisch en neutraal; en zoo vervolgens, tot zich van het *kristallijne* lichaam niet meer vertoonde (hoogstwaarschijnlijk analoog met de kristallijne baryumverbinding, vroeger verkregen met azijnzuur en baryumacetaat). Maar aldus werkende, ziet men de hoeveelheid der twee neêrslagen op onrustbarende wijze verminderen.

Bij de volgende proef werd een waterige oplossing van 6 gr. oplosbaar product (van *chloor* bevrijd met zilvernitraat) evenzoo eerst neêrgeslagen met *neutraal* en daarna met *basisch* azijnzuur lood. Dit laatste neêrslag is overvloediger (beiden zijn een weinig gekleurd). De twee neêrslagen worden beiden *roodbruin* gekleurd door *ferrichloride*, vooral het geval met het neêrslag ontstaan met *basisch* azijnzuur lood. Alle twee gaven met verdund salpeterzuur van het *kristallijne* lichaam, en wel het neêrslag, aanvankelijk met neutraal azijnzuurlood ontstaan, 0,158 gr. (van 6 gr. *oplosbaar* product).

Opnieuw doet zich de vraag voor, of dit kristallijne lichaam (en een tweede afgeleide) een ontledingsproduct is van een oorspronkelijk zuur, afgeleid van of als zoodanig aanwezig in de *waterige oplossing* van *oplosbaar* product (*niet* te verwarren met het *oplosbaar* product als zoodanig, namelijk in vasten staat, dat zoo goed als zeker een zuur bevat van een anderen aard, en samengestelder).

De verkleuring met ferrichloride zou als argument kunnen gelden voor de veronderstelling, dat zich in de waterige oplossing een meer samengestelde verbinding bevindt (omgezet in een loodverbinding); maar dit argument gaat ten deele verloren, omdat *onoplosbaar* product zich eenigzins anders schijnt te verhouden (zie later).

Het neêrslag met *basisch* azijnzuur lood van *oplosbaar* product, zie boven, werd, verdeeld in water, ontleed met *zwavelwaterstof*, en na filtratie de vloeistof geplaatst onder een exsiccator. Er bleef terug

van een *siropige* massa, oplosbaar in water en alcohol. De waterige oplossing (met eenig zoutzuur) gaf *geen* reactie met zoutzure phenylhydrazine (reactie op glyoxylzuur volgens ELBERS [1])). De oorspronkelijke stof scheen onveranderd te zijn gebleven, want de waterige oplossing gaf een *rood-bruine* verkleuring met ferrichloride, werd neêrgeslagen door barytwater in overmaat (welk neêrslag eveneens de verkleuring gaf met ferrichloride), en dit laatste met zilvernitraat bij verwarming een zilver*spiegel.*

Onoplosbaar product. Ook dit lichaam is behandeld met de loodacetaten, nadat de waterige oplossing eerst bevrijd was van *chloor.* Een hoeveelheid van 0,8186 *onoplosbaar product* gaf (opgelost in water, met verdund salpeterzuur zwak zuur gemaakt) 0,0195 gr. chloorzilver, bevattende 0,004822 gr. chloor of 0,58 pCt.. Er werd bij gevolg minder gevonden dan vroeger [2]), toen dit bedroeg 1,27 of ongeveer 1,3 pCt. Maar er werd toen reeds gezegd, dat het chloorgehalte van *onoplosbaar* product (in den vorm waarschijnlijk van chloornatrium; zie wat later) een bijmengsel zou zijn. Ook werd ter contrôle nog een chloorbepaling verricht met *kalk.* Een hoeveelheid van 0,8414 gr. derzelfde bereiding gaf 0,0209 gr. chloorzilver, bevattende 0,005 168 gr. chloor, of 0,61 pCt.. Hieruit volgt dus, dat geen *zuringzuur* zilver is neêrgeslagen, ten minste niet in noemenswaardige hoeveelheid. De waterige oplossing, bevrijd van chloor, werd eerst met neutraal, daarna met basisch azijnzuur lood neêrgeslagen.. Dit laatste neêrslag werd *weinig* verkleurd met ferrichloride, zoodat men in deze reactie geen argument heeft, om in de waterige oplossing van onoplosbaar product een samengestelde verbinding aan te nemen, maar dit is verder na te gaan. De baryumverbinding afgeleid van *onoplosbaar* product, zou dus ook een mengsel kunnen zijn als van oplosbaar product; en hetzelfde geldt met betrekking tot de oplossing van dit laatste (in *vasten* staat zijn *oplosbaar* en *onoplosbaar* product lichamen van een meer andere natuur).

Aanvankelijk gevormde baryum-verbindingen, afgeleid van oplosbaar en onoplosbaar product, behandeld met water in overmaat; en geneutraliseerd met azijnzuur. Een waterige oplossing van 1 gr. *oplosbaar* product werd neêrgeslagen met barytwater in overmaat (als naar gewoonte), het neêrslag gewasschen en van het filtrum verwijderd met 100 c.c. water. Na eenige dagen te hebben gestaan (van tijd tot tijd schuddende), werd gefiltreerd, doorgespoeld, en de

---

[1]) Ann. Ch. u. Ph. Bd. 227 S. 353.

[2]) l.c. Verslagen en Mededeelingen d. K. Akad. van Wetenschappen. Afd. Nat. 3de Reeks Deel VIII, p. 191 (1890).

massa van het filtrum gedaan, op nieuw met 100 c.c. water behandeld; en deze bewerking werd herhaald (in hetzelfde kolfje), tot er genoegzaam niets meer terugbleef van het oplosbaar gedeelte. Een weinig afzetsel van de *kristallijne* baryum-verbinding (zie pag. 3) vertoont zich; gemakkelijk te onderscheiden van het vlokkige lichaam, dat trouwens ook meer en meer verdwijnt.

Wordt bij het begin de massa geneutraliseerd met verdund *azijnzuur* (niet in overmaat), dan komt dit kristallijne lichaam dadelijk te voorschijn.

Het aanvankelijk ontstane baryumlichaam, afgeleid van *onoplosbaar* product, verhoudt zich eenigzins anders, in zooverre, als deze verbinding moeielijker oplosbaar is in water, terwijl de kristallijne stof zich niet vertoont (zie overigens pag. 5).

Moederloog van oplosbaar en onoplosbaar product, na neêrslaan met barytwater. Deze moederloog werd aanvankelijk behandeld met *kooldioxyde* (om nog aanwezige baryt te verwijderen), daarna gefiltreerd, en het filtraat geplaatst onder een exsiccator. In de twee gevallen schijnt alleen chloornatrium terug te blijven, en sporen van andere stoffen.

Invloed van den colloïdalen toestand op den te volgen weg. Men zou wellicht geneigd zijn, om als zeker aan te nemen, dat een waterige oplossing van oplosbaar of onoplosbaar product, zwak zuur gemaakt (met salpeterzuur), en geen neêrslag gevende met zilvernitraat, geen *zuringzuur* zou kunnen bevatten, en geen neêrslag gevende met neutraal azijnzuur lood, van dit zuur niet inhoudt. Maar dit is juist de zaak in questie, die zich bij herhaling voordeed bij ons onderzoek; te weten, of zuringzuurzout zich in oplossing bevindt in *colloïdalen* staat, en in dien toestand, tenminste ten deele, volhardt. Men herinnert zich mogelijk nog, dat dit het geval zijn kan met chloornatrium [1]).

Over den vorm van het chloor in oplosbaar (en onoplosbaar) product. Er was vroeger [2]) *verondersteld*, dat het chloor aanwezig in oplosbaar product, zich daarin bevindt als *aethylchloride*, daarbij uitgaande van de volgende argumenten:

a. Bij behandeling der oplossing in aethylchloride van *oplosbaar* product in het gedeeltelijk ledig (van waterstof), laat zich een deel van het chloride moeielijk verwijderen bij het einde der bewerking (dat noodwendig doet denken aan een scheikundige verbinding met aethylchloride).

---

1) Zie l. c. Deel IX pag. 160 (1891).

2) Versl. en Meded. Deel VIII (3de Reeks) pag. 188, 191 (1890).

b. De verhouding in gehalte van *oplosbaar* product aan chloor en natrium komt *niet* overeen met die van Cl en Na (in Cl Na).

c. *Oplosbaar* product is in water oplosbaar met sterk alkalische reactie aanvankelijk, welke evenwel bij staan zeer zwak wordt.

Maar geven wij toe, dat deze argumenten, eigentlijk gezegd, van niet veel gewicht zijn. Want al het chloor zou in verbinding kunnen zijn met natrium, zonder dat al het natrium verbonden was met chloor; en bijgevolg zou de versche verbinding in oplossing een sterk alkalische reactie kunnen hebben. En wat betreft meer bepaald het argument sub *a*, zoo is mogelijk, dat het aethylchloride aanvankelijk scheikundig gebonden is, maar wordt verwijderd, en dat het laatste gedeelte alleen moeielijker wordt ontleed. Ook is het geval niet buitengesloten, dat het chloor ten deele voorhanden is als *chloornatrium* en tevens als *aethylchloride.*

Ten einde uit te gaan van experimenteele gegevens, werd de volgende proef genomen. De waterige oplossing van *oplosbaar* product werd *dadelijk* in aanraking gebracht met *azijnzuur*, om een verzeeping van *aethylcloride* te ontgaan (altijd verondersteld, dat dit aanwezig is) door natriumhychroxyde Na OH (ontstaan uit *oplosbaar* product op het oogenblik, dat dit in aanraking komt met water).

Een hoeveelheid van 1,1528 gr. *oplosbaar* product werd dadelijk in aanraking gebracht met water, waarbij eenig azijnzuur was gedaan, en behoorlijk vermengd. Daarna werd de oplossing geplaatst onder een exsiccator (met zwavelzuur, en kalk, met 't oog op het azijnzuur), en het terugblijvende opgelost in water. De oplossing werd (na zwak zuur te zijn gemaakt met salpeterzuur) neêrgeslagen met zilvernitraat. Er werd verkregen 0,5587 gr. chloorzilver, bevattende 0,13815 gr. chloor, of:

chloor 11,98 pCt.

Ter côntrole werd een hoeveelheid van 1,0645 gr. van hetzelfde *oplosbare* product opgelost in water; en, na eenigen tijd te hebben gestaan, zwak zuur gemaakt met verdund salpeterzuur, vervolgens neêrgeslagen met zilvernitraat. Alzoo werd verkregen 0,5088 gr. chloorzilver, beantwoordende aan 0,1258 gr. chloor, of:

chloor 11,81 pCt.

bijgevolg bijkans hetzelfde.

Het *oplosbare* product waarvan werd uitgegeven, was eenigszins

anders bereid (sedert is deze methode gevolgd), in zooverre als het mengsel van *oplosbaar* product met *onoplosbaar* product en het aethylchloride (het *oplosbare* product daarin opgelost) werd uitgestort in abs. aether; dan werd afgeschonken van het afzetsel (*onoplosbaar* product), en eindelijk, de oplossing geplaatst onder een exsiccator.

Het medegedeelde leidt dus tot het besluit, dat het chloor in *oplosbaar* product aanwezig is in den vorm van *chloornatrium* (Cl Na).

Om nog even terug te komen op het gehalte aan chloor van *oplosbaar* product, zoo gaf van een andere bereiding 1,2598 gr. aan chloorzilver 0,5651 gr. of 0,1398 gr. chloor, overeenstemmende met 11,1 pCt.. Maar de oplossing in aethylchoride (tegelijk met *onoplosbaar* product) had zeer langen tijd gestaan, als gevolg waarvan de oplossing meer gekleurd was.

Uitgaande eens van 6 gr. *oplosbaar* product (gevende 11,81 proc. chloor), werd het chloor geëlimineerd naar de gewone manier door de oplossing eerst zwak zuur te maken met salpeterzuur, en dan neer te slaan met zilvernitraat. Er werd 3,762 gr. van een neêrslag erlangd, in plaats van 3,05 gr., dat een verschil geeft van 0.7 gr.; een uitkomst, die tot nog toe geen verklaring heeft gevonden.

De samenstelling van oplosbaar en onoplosbaar product, uitgaande van de veronderstelling, dat het chloor daarin voorkomt als chloornatrium (Cl Na). Voor de gemiddelde samenstelling van oplosbaar product werd gevonden [1]:

koolstof	34,3
waterstof	4,5
chloor	10,5
natrium	17,2
zuurstof	30,5
	100.

Uitgaande van de veronderstelling, dat al het *chloor* is verbonden met natrium tot chloornatrium (Cl Na; zie pag. 23), dan blijven er over, aangezien 10,5 gew. d. chloor 6,8 gew. d. natrium eischen, 17,2 — 6,8 = 10,4 gew. d. *natrium*. De samenstelling van oplosbaar product, verondersteld vrij te zijn van *chloornatrium* (Cl Na), is bij gevolg:

[1]) Versl. en Mededeel. Koninkl. Akad. v. Wetensch. Afd. Natuurk. 3e Reeks, Deel VIII, 190; l.c. Deel IX, 146—156.

koolstof	34,3
waterstof	4,5
natrium	10,4
zuurstof	33,5
	82,7.

Door verplaatsing van *natrium* met *waterstof*, atoomgewichtswijze, wordt gevonden voor den ester van het zuur (van *oplosbaar* product):

koolstof	34,3
waterstof	4,9 (= 4,5 + 0,4)
zuurstof	33,5
	72,7,

of berekend op 100 gew. d. van dezen aethylester:

koolstof	47,1
waterstof	6,7.

Men was uitgegaan, zooals bekend, van *wijnsteenzuur aethyl* (dat werd omgezet in dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, en dit op zijn beurt behandeld met aethylchloride enz.); en merkwaardig is het geringe verschil in samenstelling dezer twee lichamen. De aethylester van wijnsteenzuur eischt namelijk:

koolstof	46,6
waterstof	6,8.

Het *eindproduct* zou dus nagenoeg dezelfde samenstelling hebben als het *aanvangsproduct* (voorzooverre betreft *oplosbaar* product), dat wel mogelijk is, indien b.v. de alcohol, die werd verondersteld te zijn geëlimineerd, zich verbindt met het nieuwe molecuul. Maar men zou terecht kunnen opmerken, dat na de reactie [1]) met aethylchloride, in dit laatste, in overmaat aanwezig, eenige alkohol is aangetroffen. Eveneens zou kunnen gezegd worden, dat deze het gevolg kon wezen der vorming van *onoplosbaar* product. Daartegenover staat weder, dat de samenstelling der gekristalliseerde koperverbinding eerder doet denken aan de vorming van een monaethyl*tartryl-wijnsteenzuur*, welk zuur vordert: [2])

---

1) Rec. Trav. chim. Pays-Bas, T. IX, p. 270.

2) Versl. en Meded. Kon. Akad. v. W. Afd. Nat, Dl. IX, p. 155 en p. 175.

koolstof 48,7
waterstof 6,6.

Het dus geheeten „*oplosbaar* product" is ook niet volkomen zuiver (ongerekend noodwendig zijn gehalte aan chloornatrium, verondersteld, dat dit als bijmengsel aanwezig is); de geel-bruine kleur maakt dit althans waarschijnlijk (*onoplosbaar* product is genoegzaam kleurloos), en zoomede de wijze van bereiding.

Vroeger [1]) werd verondersteld, dat het chloor in *oplosbaar* product aanwezig is in den vorm van *aethylchloride*; de aethylester zou dan tot samenstelling hebben op 100 gew. d.:

koolstof 42,0
waterstof 5,6,

dat een aanmerkelijk verschil maakt met de zooeven verkregen uitkomst, toen van de veronderstelling uitgaande, dat het *chloor* er in voorkomt als *chloornatrium*.

Volgt men dezelfde redeneering met *onoplosbaar* product, en veronderstelt derhalve, dat het chloor er in voorkomt als *chloornatrium* en niet als aethylchloride, dan is het verschil lang zoo groot niet, zooals weldra zal blijken [2]).

Nemen we het gemiddelde der analysen van *onoplosbaar* product. Berekend op 100 gew. d. heeft men:

						gemiddeld:
koolstof	34,7;	34,7;	34,8;	35,0;	35,5;	35,9
waterstof	3,7	3,7	3,7	3,6	3,6	3,7
chloor	1,3	—	—	1,7	1,4	1,6
natrium	—	—	—	19,9	19,7	19,8
zuurstof	—	—	—	—	—	40,0
						100,

De gew. hoeveelheid van 1,6 chloor vordert 1,04 gew. d. natrium ter vorming van chloornatrium, zoodat overblijft 19,8 — 1,04 = 18,76 gew. d. natrium, waarvoor wordt genomen 18,8 gew. d.. Bij gevolg blijft over:

---

[1]) l. c. Deel IX, p. 153.

[2]) Zie Versl. en Mededeel. Kon. Akad. v. Wet. Afd. Nat. 3e Reeks, Deel VIII, p. 191 en 192, Deel IX, p. 147 (de analyse voorkomende op pag. 159 is hier niet opgenomen, omdat de bereidingswijze eenigermate afweek).

koolstof	34,9
waterstof	3,7
natrium	18,8
zuurstof	40,0
	97,4.

Wordt natrium verplaatst door waterstof, dan geeft de berekening:

koolstof	34,9
waterstof	4,5 (= 3,7 + 0,8)
zuurstof	40,0
	79,4,

of op 100 gew. d.:

koolstof	43,9
waterstof	5,7,

uitgaande van de veronderstelling, dat het chloor in *onoplosbaar* product aanwezig is als chloornatrium. Ingeval chloor den vorm zou aannemen van aethylchloride, dan was vroeger gevonden [1]:

koolstof	43,3
waterstof	5,6.

Uit het medegedeelde volgt dus, dat, indien het chloor wordt verondersteld aanwezig te zijn als *chloornatrium* (zie dienaangaande de proef vermeld op pag. 24), de samenstelling van den aethylester van het zuur, verondersteld aanwezig te zijn in *oplosbaar* en *onoplosbaar* product, is, berekend op 100 gew. d.:

	oplosbaar product.	*onoplosbaar* product.
koolstof	47,1	43,9
waterstof	6,7	5,7.

Neemt men aan, zooals is gedaan (steunende op de proef van pag. 24), dat het chloor in *oplosbaar* product voorkomt als *chloornatrium* (en bij gevolg tevens in *onoplosbaar* product, waar het chloor slechts als bijmengsel optreedt), dan blijft de vraag nog over,

[1]) Zie l. c. Versl. en Mededeel. Deel IX, pag. 153.

of het chloornatrium vrij is of gebonden. De kans schijnt niet zoo heel groot te zijn, dat het chloornatrium in verbinding is; in ieder geval is dit mogelijk. Er is wellicht aanleiding, om het er voor te houden, dat het chloornatrium niet verbonden is, en aanwezig is in colloïdalen (amorphen toestand), aangezien dit laatste het geval is bij ontleding van oplosbaar product (bijv. opgelost in aethylchloride) met zoutzuurgas. Maar hiertegen zou kunnen worden opgemerkt, dat het aldus afgescheiden chloornatrium zich niet oplost in zuiveren alkohol en aether, wel het geval met *oplosbaar* product. Bijgevolg is het besluit, dat met 't oog op de bekende feiten, moet worden aangenomen, ten minste voor 't oogenblik, dat het chloornatrium *verbonden* is met de hoofdverbinding. En deze laatste zal zijn een natrium-verbinding van den aethylester van *aethyltartryl wijnsteenzuur* (I), en *onoplosbaar* product zal wezen een natriumverbinding van den aethylester van *tartrylwijnsteenzuur* (II), terwijl deze verbindingen vorderen:

	I [1].	II [1].
koolstof	48,7	45,0
waterstof	6,6	6,0.

Het gehalte aan koolstof der *eerste* baryumverbinding van *oplosbaar* product [2]) is wat hooger dan dat van *onoplosbaar* product [3]), dat dan tevens een verklaring zou hebben gevonden (men bedoelt de baryumverbindingen, waarvan de twee andere (zelfde) baryumlichamen zijn afgeleid, geheeten de kristallijne baryumverbinding en het lichaam in plaatjes). In ieder geval, is dit nog te bewijzen.

Vorming van zuringzuur uit oplosbaar en onoplosbaar product. Oplosbaar product geeft meer zuringzuur baryum (de kristallijne baryumverbinding als zoodanig beschouwd), dan *onoplosbaar* product. Daarentegen geeft *onoplosbaar* product betrekkelijk meer van het lichaam in *plaatjes*, dan het geval is met *oplosbaar* product. Voor 't oogenblik is het noodwendig niet wel mogelijk, daarvan een eigentlijke verklaring te geven. Maar er volgt toch uit, dat *oplosbaar* en *onoplosbaar* product in den grond hetzelfde karakter hebben. En veronderstellende, dat beiden eenvoudige (esters, enz.) afgeleiden zijn van tartrylwijnsteenzuur:

---

[1]) Zie l. c. Versl. en Med. Deel IX p. 11.

[2]) Zie Verhand. Kon. Akad. v. W. (Eerste Sectie) Deel I. N°. 7, p. 25.

[3]) l. c. Verhand. p. 24.

```
                          /OH
CO—CH—CH—CO—C———CH—CO—OH
 |    |    |      |      |
OH   OH   OH    CO—OH  OH,
```

dan is een ontstaan van zuringzuur zeer gemakkelijk te geven (zie een weinig later, het theoretisch gedeelte). Maar men zou in de eerste plaats het zuur van het lichaam in plaatjes goed moeten kennen, om er een afdoende verklaring van te kunnen geven.

Over de afwezigheid van wijnsteenzuur in oplosbaar en onoplosbaar product. Dinatrium-wijnsteenzuur aethyl wordt zoolang in aanraking gelaten met aethylchloride, tot er geen afzetsel meer ontstaat (van *onoplosbaar* product). Voor alle zekerheid, ten einde de omzetting volledig te doen zijn, wordt het geheel nog eenige dagen aan zichzelf overgelaten. Toch is het mogelijk, dat de evenwichtstoestand de aanwezigheid vordert van een zekere hoeveelheid dinatrium-wijnsteenzuur aethyl. Evenwel is de kans daartoe wel niet groot, omdat aethylchloride in *overmaat* aanwezig is. Ook kan men zich overtuigen van de afwezigheid van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in *oplosbaar* product, daar dit laatste oplosbaar, en het eerste onoplosbaar is in abs. aether. *Onoplosbaar* product daarentegen is onoplosbaar in abs. aether, maar ook in aethylchloride, welk laatste oplost dinatrium-wijnsteenzuur aethyl (overigens, om het spoedig om te zetten). Koperchloride geeft ook geen blauwe oplossing met *oplosbaar* product, dat wel het geval is, wanneer dinatrium-wijnsteenzuur aethyl niet den vereischten tijd heeft gehad voor de omzetting.

Over de betrekkelijke standvastigheid van het product der reactie van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl en aethylchloride. Tot nog toe had men verondersteld, dat er scheikundig evenwicht plaats had na eenigen tijd te hebben gestaan, en wel vooral, omdat het afzetsel, dat zich vormt, niet meer schijnt toe te nemen. Maar later is gebleken, dat de kleur der oplossing (bevat in een toegesmolten buis) meer en meer intensiever wordt, zonder dat er meer afzetsel schijnt te ontstaan. Derhalve ligt het besluit voor de hand, dat het evenwicht niet volkomen zal wezen.

Een kleine wyziging in de bereiding van dinatrium- en mononatrium-wijnsteenzuur aethyl. Zoodra de wijnsteenzure ester gedaan

---

[1]) l. c. deze Verhandeling pag. 10, 21, 26.
[2]) l. c. Versl. en Mededeel. VII, p. 34.
[3]) l. c. Verhand. Kon. Akad. Deel I, p. 17.
[4]) l. c. Versl. en Mededeel. VIII, p. 37.

is in het kolfje, wordt dit gevuld met *waterstof*, de alkoholische oplossing van natriumaethylaat toegevoegd, zonder te schudden; en dan een stroom waterstof doorgejaagd *ter vermenging* der twee stoffen, alsmede geschud. Het kolfje wordt vervolgens verbonden met de kwikpomp. Dezelfde wijziging is aan te brengen in de bereiding van mononatrium-wijnsteenzuur aethyl. Op die wijze te werk gaande, is de oplossing betrekkelijk minder gekleurd.

Theoretisch gedeelte. De vorming van zuringzuur verlangt eenige opheldering. Jammer, dat men nog niet zich kan uitspreken over den aard van het zuur van het lichaam in plaatjes van *oplosbaar* en *onoplosbaar* product, want in dat geval zou men zich een vrij goed denkbeeld kunnen maken van het *ketonzuur*, dat een gekleurde verbinding geeft met ijzerchloride (altijd verondersteld, dat dit niet is toeteschrijven aan eenig ander bestanddeel), en waaruit genoemde twee zuren te gelijkertijd ontstaan. Nog steeds is het waarschijnlijk, dat het eerste lichaam, dat ontstaat door dinatriumwijnsteenzuur aethyl (met aethylchloride), in hoofdzaak is *tartrylwijnsteenzuur*, dat slechts 1 H_2O verschilt met 2 mol. wijnsteenzuur:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & & & & & & & & \diagup CO-OH & & & & & & & \\ CO & - & CH & - & CH & - & CO & - & C & - & CH & - & CO & & CO-CH-CH-CO \\ | & & | & & | & & & & | & & | & & | & + H_2O = 2 & |\quad\;\; |\quad\;\; |\quad\;\; | \\ OH & & OH & & OH & & & & OH & & OH & & OH & & OH\;\; OH\;\; OH\;\; OH, \end{array}$$

dus kan men evengoed wijnsteenzuur nemen als uitgangspunt, en de stoffen teruggeven, die daaruit kunnen ontstaan, waartoe zuringzuur dan behoort:

$$\begin{array}{ccccccccccc} CO & - & CH & - & CH & - & CO^{1)} & & CH_3-CO & & CO-CO \\ | & & | & & | & & | & = & \quad\;\; | & + & |\quad\;\; | \\ OH & & OH & & OH & & OH & & \quad\;\; OH & & OH\;\; OH \end{array}$$

en daarenboven:

$$\begin{array}{ccccccccccc} CO & - & CH & - & CH & - & CO & & CH_2-CO & & COH-CO \\ | & & | & & | & & | & = & |\quad\;\; | & + & \quad\;\; | \\ OH & & OH & & OH & & OH & & OH\;\; OH & & \quad\;\; OH \end{array}$$ (tevens nog nategaan).

Wijnsteenzuur kan ook aldus worden ontleed:

$$a.\quad \begin{array}{ccccccc} CO & - & CH & - & CH & - & CO \\ | & & | & & | & & | \\ OH & & OH & & OH & & OH \end{array} = CO_2 + \begin{array}{ccccc} CH_2 & - & CH & - & CO \\ | & & | & & | \\ OH & & OH & & OH \end{array}$$

$$b.\quad \begin{array}{ccccc} CH_2 & - & CH & - & CO \\ | & & | & & | \\ OH & & OH & & OH \end{array} = H_2O + CH_3-CO-CO-OH$$

(alleen is de sommaire reactie bekend),

1) Zie l.c. Verhand. Kon. Akad. v. Wet., Deel I, pag. 13.

maar deze laatste reactie schijnt niet op te treden; ten minste is daarvan niets gebleken (terwijl tegelijkertijd opzettelijk een studie werd gemaakt van brandrigduivenzuur, om daarop naar behooren 't oog te kunnen houden).

Over de methode van onderzoek gevolgd. Het is niet overbodig, om in enkele woorden een overzicht te geven van den gedanen arbeid betreffende de reactie van *dinatrium-wijnsteenzuur aethyl* [1]) en *aethylchloride.* Deze studie toch biedt vrij groote bezwaren aan, onder anderen als gevolg van den colloïdalen toestand van eenige verbindingen die zich voordoet, en zeer merkbaar invloed uitoefent op de oplosbaarheid in eenige oplossingsmiddelen.

De ingeslagen weg is de volgende. De vorming van een afzetsel deed al dadelijk twee lichamen onderscheiden, geheeten, *oplosbaar* [2]) en *onoplosbaar* [2]) product. Van deze lichamen werden analysen [3]) gedaan. En, om te komen tot minder samengestelde verbindingen en tevens meer scheikundig zuiver, liet men *chloorwaterstofgas* [4]) inwerken op *oplosbaar* en *onoplosbaar* product bij aanwezigheid van *aethylchloride*, terwijl de verkregen stoffen werden geanalyseerd [5]). Maar deze lichamen waren siropig (dikvloeibaar), en gaven reeds daardoor minder vertrouwen met betrekking tot zuiverheid. Dit deed een poging wagen, om kristallijne verbindingen te bekomen, en men was gelukkig genoeg, te zien optreden, al was het onder zeer bepaalde omstandigheden, een goed gekristalliseerde koperverbinding [6]). Maar de opbrengst deed eenig bezwaar ontstaan, om in deze richting voorttegaan. Toch werd dit lichaam eenigermate nagegaan, en er met zwavelwaterstof [7]) een afgeleide van verkregen, dat er het vrije zuur van kan zijn, maar overigens een siropige massa vormt. Om die redenen werd een weinig van richting veranderd. Er werd tamelijk zeker aangetoond, dat het *chloor* in oplosbaar product optreedt als chloornatrium [8]) (Cl Na), waarschijnlijk in verbinding en deze in colloïdalen toestand [9]), met geheel bijzondere eigenschappen, vooral wat betreft de groote mate van oplosbaarheid in verscheiden oplossingsmiddelen, dat de studie niet weinig bemoeielijkt (zie vroeger). Men

---

1) l.c. Versl. en Med. Deel VII, 37; deze Verh. pag. 30.

2) l.c. Deel VII, p. 176—195; Deel IX, 145—161; l.c. Verh. Kon. Akad. D. I, 17; deze Verhand. pag. 24, 25.

3) l.c. Deel VIII, p. 195; deze Verhand. pag. 25, 27.

4) l.c. Deel VIII, 195, Deel IX, 146—157.

5) l.c. Deel IX, 146—157.

6) l.c. Versl. en Med. IX, p. 168; l.c. Verh. Kon. Akad. I, p. 3.

7) l.c. Verh. Kon. Akad. I, p. 7.

8) Deze Verh. p. 23.

9) l.c. Versl. en Med. Deel IX, p. 160.

is verder een studie gaan maken van ontledingsproducten, anders gezegd, werd meer de analytische weg gevolgd, om later weder synthetisch te arbeiden. Vooral werd de met baryt verkregen afgeleide van *oplosbaar* en *onoplosbaar* product nader onderzocht tegenover *azijnzuur* [1]). Tevens werd ook een poging gewaagd, het chloor van oplosbaar product te verwijderen, en vervolgens gepraecipiteerd, eerst met neutraal en dan met basisch azijnzuur lood, en het laatste neêrslag ontleed met zwavelwaterstof [2]), zonder evenwel te komen tot een kristallijne verbinding, ten minste tot nog toe. Daarentegen schijnt de studie der ontledingsproduten der baryumverbindingen (zie boven) met azijnzuur, te zullen leiden tot een nadere kennis aangaande het *ketonzuur* aanvankelijk gevormd. In verband met het aanhangige onderwerp, deed men een studie van *brandigdruivenzuur* tegenover baryt [3]) in overmaat, om redenen ter plaatse medegedeeld. Ter vergelijking werd het dinatriumdruivenzuur aethyl [4]) gemaakt; en meer of min de vorming van succinylbarnsteenzuur [5]) nagegaan.

Aanhangsel. Het onderzoek, waarvan sprake is, vereischte de studie meer of min van eenige reacties en verbindingen, waarvan de uitkomsten thans zullen worden medegedeeld.

Colloïdaal (amorph) wijnsteenzuur baryum [6]). Wordt b.v. 1 gr. *wijnsteenzuur* en 2 gr. *brandigdruivenzuur* (niet volkomen zuiver) opgelost, en de waterige oplossing neêrgeslagen met baryt, eenigzins in overmaat, dan vormt zich een volumineus neêrslag (dat bij staan niet ten deele schijnt te kristalliseeren); in verdund *azijnzuur* wordt dit opgelost, om opgelost te blijven (ten minste gedurende eenige dagen).

Neutraal wijnsteenzuur baryum is, versch neêrgeslagen, *amorph*, zooals bekend, maar wordt weldra *kristallijn*, en in dezen kristallijnen toestand is het *onoplosbaar* in verdund (en zelfs geconcentreerd) azijnzuur.

Uit de medegedeelde proef zou kunnen afgeleid worden, dat wijnsteenzuur baryum volhardt in den *amorphen* staat onder bovengenoemde omstandigheden (wel voor een zekeren tijd), en dat als gevolg

---

1) l.c. Verh. Kon. Akad. I, p. 28; deze Verh. p. 3—20.
2) Deze Verh. p. 20.
3) l.c. Verh. Kon. Akad. I, p. 33; deze Verh. p. 36.
4) l.c. Verh. Kon. Akad. I, p. 17.
5) l.c. Verh. Kon. Akad. I, p. 18.
6) l.c. Verh. Kon. Akad. I, p. 36.

der aanwezigheid der baryumverbinding afgeleid van brandigdruivenzuur. Dit schijnt tevens te volgen uit deze proef.

Met elkander werden gemengd 1gr. wijnsteenzuur en 2 gr. brandigdruivenzuur, en de oplossing nêergeslagen met barytwater in overmaat, gefiltreerd en gewasschen. Thans werd op het filtrum gedaan van een oplossing van *azijnzuur baryum*, en de trechter gesloten met een caoutchoucstop. Alles werd opgelost, behoudens een onbeduidende kleine hoeveelheid stof. Toch lost de baryumverbinding, afgeleid van brandigdruivenzuur, moeielijk op in azijnzuur baryum.

Gelijk het geval is met versch neêrgeslagen wijnsteenzuur baryum, schijnt ook gemelde verbinding *amorph* te zijn, en men schijnt dus hier te doen te hebben met een voorbeeld van twee *amorphe* stoffen, waarvan de eene de andere belemmert om te kristalliseeren.

Aangezien de betrekkelijke hoeveelheid der twee zuren willekeurig was genomen, is de vorming van een dubbelzout, alhoewel altijd mogelijk, zoo goed als buitengesloten.

Wordt wijnsteenzuur vermengd b.v. met zuringzuur, dan schijnt juist het tegenovergestelde geval in te treden.

Colloïdaal zuringzuur baryum. De baryum-afgeleiden van *oplosbaar* en *onoplosbaar* product zouden zuringzuur baryum kunnen bevatten. Maar deze afgeleiden vertoonen niets van een kristallijne stof onder den microscoop, en bij gevolg zou dit zuringzuurzout dan *amorph* moeten zijn. De volgende proeven werden gedaan met het doel om te trachten een dergelijk mengsel na te bootsen (verondersteld altijd, dat gezegde lichamen mengsels zijn). Men zou hier namelijk hetzelfde kunnen hebben, als het geval was met wijnsteenzuur baryum, vermengd met de van brandigdruivenzuur afgeleide baryumverbinding (met baryt in overmaat). In deze richting werd de volgende proef genomen. Er werd 1 gr. zuringzuur in water opgelost met 2 gr. brandigdruivenzuur, vervolgens neêrgeslagen met baryt in overmaat (dat *snel* moet geschieden, om een kristalliseeren van zuringzuur baryum te voorkomen), terwijl de massa daarna eenigen tijd aan zichzelve werd overgelaten. Werkt men onder de vereischte omstandigheden, dan ontstaat een *geleiachtige* massa, die, om zoo te zeggen, volkomen wordt opgelost in *verdund azijnzuur* (wil men het geheel tot de laatste sporen oplossen, dan moet hiervan een groote hoeveelheid worden genomen, wel tengevolge eener kleine hoeveelheid eener zekere baryumverbinding van het lichaam, afgeleid van brandigdruivenzuur, dat niet geheel zuiver was). Hieruit volgt dan, dat zuringzuur baryum in amorphen staat schijnt te kunnen optreden (tot nog toe was het alleen bekend als kristallijne

verbinding [1]), naar het schijnt). Evenwel zet zich onder gemelde omstandigheden, een weinig kristallijn zuringzuur baryum af na eenigen tijd, dat onoplosbaar is in verdund azijnzuur. De proef werd herhaald in dien zin, dat de waterige oplossing der twee stoffen (1 gr. zuringzuur en 2 gr. brandigdruivenzuur) werd uitgestort in 500 c.c. barytwater (in de eerste proef had het omgekeerde plaats), terwijl goed werd geschud. Een deel der voluminense massa werd behandeld met verdund *azijnzuur*, een andere hoeveelheid met een oplossing van *azijnzuur baryum*, en een derde hoeveelheid met een oplossing van *baryumchloride*. Alles werd opgelost in deze drie gevallen, terwijl zuringzuur baryum in deze oplossingsmiddelen onoplosbaar is. Maar laat men deze drie oplossingen eenigen tijd staan, dan zet zich langzamerhand kristallijn zuringzuur baryum af. Ook, wanneer de geleiachtige massa eenigen tijd heeft gestaan, kan men onder den microscoop daarin spheroïden aantreffen en naaldvormige kristallen (niet het geval bij het begin der proef). Behandelt men dan de massa met verdund azijnzuur of azijnzuur baryum in oplossing, dan blijft eenig gekristalliseerd zuringzuur baryum onopgelost terug, en na filtratie, wordt uit het filtraat een nieuwe hoeveelheid afgezet. Uit het medegedeelde volgt dus, dat gezegde omzetting wel kan worden vertraagd, maar niet, om zoo te zeggen, opgeheven, ten minste onder genoemde omstandigheden.

Gemelde proeven zijn gedaan, zooals gezegd, met 't oog op de baryumverbindingen afgeleid van *oplosbaar* en *onoplosbaar* product. Deze doen niets blijken van eenig kristallijn inmengsel onder den microscoop, maar is dit dadelijk het geval bij behandeling met verdund azijnzuur en azijnzuur baryum in oplossing. Er is dus eenig verschil op te merken tusschen de twee laatste baryum-verbindingen, en het mengsel van zuringzuur baryum (aanvankelijk amorph) en het van brandigdruivenzuur afgeleide baryum-zout (tevens amorph).

Over de rol, wellicht te vervullen door zouten in colloïdalen toestand in de levende plant. Men wenschte slechts met een enkel woord de aandacht te vestigen op de rol vervuld misschien door sommige zouten, als gevolg van hun meer of min volharden in den colloïdalen staat, en dat wel door de aanwezigheid van colloïdale stoffen. Eenige proeven met een afgeleide van brandigdruivenzuur gedaan, mogen de aanleiding zijn tot deze opmerking. Het behoeft wel niet gezegd, dat de eiwitstoffen (bijv. met bases) in dien zin nog al werkzaam zouden kunnen zijn. Ook is duidelijk, welk een in-

---

[1]) Zie bijv. Handl. Org. Chem. Beilstein Bd. I, 642 (1892).

vloed dit zou kunnen hebben, daar colloïdale stoffen in vele eigenschappen zeer kunnen verschillen met deze stoffen in kristallijnen toestand, in de eerste plaats wat betreft de *oplosbaarheid*, om niet te spreken van andere eigenschappen. Een zout, dat genoegzaam onoplosbaar is in de gewone oplossingsmiddelen, kan dan daarin gemakkelijk oplosbaar worden; en van welken invloed moet reeds zulk een verschil niet zijn voor het plantaardig leven.

Over parabrandigdruivenzuur. Brandigdruivenzuur werd tweemaal gefractionneerd [1]) (het gedeelte werd genomen overgaande tusschen 136° — 170°), eenig water bijgedaan, en neêrgeslagen met barytwater (verzadigd) in overmaat (en wel ongeveer 40 gr. met 2 kilogr. barytwater). Na eenige dagen te hebben gestaan (er werd nu en dan geschud), werd gefiltreerd en doorgespoeld (driemaal). Bij de massa, met een weinig water gedaan van het filtrum, werd *azijnzuur* gevoegd (te weten in de volgende bereidingen eerst 40, toen 20 en 10 gr. van dit zuur). Aanvankelijk was de massa een weinig gekleurd, maar werd toen kleurloos; zij werd gedaan op een filtrum, doorgespoeld, en met filtrum geplaatst tusschen filtreerpapier (nu en dan ververscht), daarna onder een exsiccator (met zwavelzuur en natrium). De opbrengst is ongeveer 14 gr., dus afgeleid van 34 gr. gefractionneerd brandigdruivenzuur.

Het lichaam doet zich voor als een witte harde massa, meer of min het aanzien bezittende van krijt. Een deel van het water verliest het zeer moeielijk, zelfs onder gemelde omstandigheden, dat eenige weken vordert. De verbinding is *zeer hygrosscopisch*, zoodat er geen nauwkeurige analyse van is te doen, of er zijn bijzondere voorzorgen in acht te nemen. Om het drogen te bevorderen werd de harde massa verhit in een stroom droge lucht tot 110°. Aan vochtige lucht blootgesteld, neemt men soms het merkwaardige verschijnsel waar, dat uit de massa, zich van zelf verdeelende, stukjes der verbinding worden weggeslingerd op een betrekkelijk grooten afstand.

Het lichaam is bijna onoplosbaar in water. Een hoeveelheid van 0,043 gr. stof en 5 gr. water werd eenige dagen aan zich zelf overgelaten; daarna werd gefiltreerd, en met zwavelzuur slechts een zwakke reactie verkregen.

I. Een hoeveelheid van 0,7618 gr. stof (gemaakt met 40 gr. azijnzuur, zie boven) gaf 0,6061 gr. kooldioxyde en 0,1906 gr. water.

---

[1]) l.c. Verhand Kon. Akad. Bd. I, p. 30.

II. 0,4602 gr. stof (bereid met 20 gr. azijnzuur, zie pag. 36) gaf 0,2717 gr. baryumcarbonaat (na gloeing en behandeling met koolzuren ammoniak. Er werd gebruik gemaakt van een inrichting ten doel hebbende, om de fout te ontgaan veroorzaakt door het zwaveligzuur der vlam van het steenkolengas; en zoo ook bij volgende bepalingen. Deze hoeveelheid koolzuur baryum komt overeen met 0,189 gr. baryum.

Een hoeveelheid van 0,6997 gr. stof gaf 0,5548 gr. kooldioxyde en 0,1668 gr. water.

III. Een hoeveelheid van 0,4223 gr. stof (gemaakt met 10 gr. azijnzuur, zie pag. 36) leverde op 0,2531 gr. koolzuur baryum (werd behandeld met koolzuren ammoniak, en ook overigens op gelijke wijze als vroeger), bevattende 0,17606 gr. baryum.

0,7511 gr. stof gaf 0,6022 gr. kooldioxyde en 0,1726 gr. water.

Berekend op 100 gew. d. komt dit overeen met:

	I.	II.	III.	$(CH_3, CO. CO. O)_2$ Ba + H_2 O eischt:
koolstof	21,7	21,6	21,9	21,9
waterstof	2,8	2,6	2,5	2,4
baryum	—	41,1	41,7	41,7.

De hoeveelheid gebruikt azijnzuur schijnt bijgevolg al zeer weinig invloed te hebben.

Naar Böttinger [1]) zou het neutrale baryumzout der basische verbinding van Finck [2]) een zuur bevatten door dezen scheikundige bestempeld met den naam van *hydruvinezuur*. Men is niet mogen slagen, om dit zout afteleiden van het lichaam van Finck, volgens de methode door Böttinger daartoe gegeven [3]). Merkwaardig is, dat Böttinger aan dit neutrale zout dezelfde formule geeft, uitgedrukt in die van brandigdruivenzuur, als gevonden werd voor de verbinding afgeleid van die van Finck met *azijnzuur* (zie vroeger), te weten die van $(CH_3, CO. CO. O)_2$ Ba + H_2 O (bij verhitten tot 110°); en vooral, omdat deze twee produkten moeielijk dezelfde stof kunnen zijn, met 't oog op het verschil in eigenschappen, dat zij vertoonen. Het lichaam van Böttinger zou namelijk zeer oplosbaar zijn in water („in Wasser sehr leicht löslich), terwijl onze verbinding daarin bijkans *onoplosbaar* is. Ook is door Böttinger van

---

[1]) Ann. Ch. u. Ph. 208, 129.

[2]) Zie Verhand. Kon. Akad. I. 33.

[3]) l.c. Verhand. Kon. Akad. 35.

zijn neutrale baryumverbinding (uit de waterige oplossing neêrgeslagen met alkohol) een zinkzout afgeleid, dat genoegzaam onmogelijk zou zijn met het zout door azijnzuur erlangd uit de basische verbinding van Finck. Dit neutraal baryumzout vertoont somwijlen het verschijnsel (zie pag. 36), om, geplaatst zijnde in vochtige lucht, deeltjes te slingeren op een betrekkelijk grooten afstand, en dat wel als gevolg van zeer hygroscopisch te zijn. Böttinger doet geen melding van deze laatste eigenschap, die het noodig maakt, de stof onder bijzondere omstandigheden te plaatsen bij het analyseeren (zie vroeger). Het zuur in vrijen staat, namelijk het hydruvinezuur, treedt volgens Böttinger ook op als een siropige massa. Bij behandeling evenwel van het basische zout van Finck met verdund zoutzuur, en plaatsing der oplossing onder een exsiccator, behandeling van het terugblijvende met alkohol, en verdampen van het overblijvende met abs. aether, verkrijgt men na verdampen van den aether een meer of min *gomachtige* massa (dit lichaam is hygroscopisch en volhardt dientengevolge geruimen tijd in den siropigen toestand; ook vervluchtigt de aether ten deele vrij moeielijk). Het besluit is derhalve, dat het lichaam van Böttinger een ander zal zijn, dan waarvan sprake is. Teneinde verwarring te voorkomen, is aan dit laatste den naam gegeven van *parabrandigdruivenzuur*, ook omdat de plaats ingenomen door het molecuul water in $(CH_3, CO. CO. O)_2 Ba + H_2O$ (de formule is slechts uitgedrukt in die van het brandigdruivenzuur) ten eenenmale onbekend is, dat tevens geldt voor het hydruvinezuur van Böttinger, die alleen analysen deed van eenige zouten.

Alvorens verder te gaan, nog het volgende. Wordt brandigdruivenzuur neêrgeslagen met barytwater in overmaat, gefiltreerd, doorgespoeld, het neêrslag met eenig water van het filtrum gedaan, daarna gezuiverd met wat azijnzuur (5 gr. op 20 gr. gefractionneerd brandigdruivenzuur), op nieuw gebracht op een filtrum en gewasschen, daarna van het filtrum genomen met eenig water; en thans verhit met verdund azijnzuur, dan blijft na bekoeling alles in oplossing. Indien thans wordt neêrgeslagen met neutraal azijnzuur lood, gefiltreerd (en doorgespoeld), daarna het neêrslag ontleed met zwavelwaterstof, gefiltreerd, en het filtraat wordt ingedampt (op een waterbad), dan blijft een vaste massa terug, waaruit alkohol weinig opneemt; en opgelost in water rijkelijk een neêrslag geeft met verdund zwavelzuur van baryumsulphaat.

Het lichaam van Finck, door Böttinger beschouwd als een basisch zout van hydruvinezuur, dat geen constante samenstelling zou hebben, zou dan beschouwd kunnen worden als (waarschijnlijk) te zijn een basisch zout van parabrandigdruivenzuur.

Het parabrandigdruivenzuur vertegenwoordigt waarschijnlijk het zuur der zouten door BERZELIUS [1]) teruggebracht tot de *gomachtige* [2]) wijziging, tegenover de kristallijne zouten, die verbindingen zijn van brandigdruivenzuur. De omzetting van kristallijne in gomachtige zouten, geschiedt veelal zeer gemakkelijk. Het neutrale baryumzout waarvan sprake is, vormt waarschijnlijk het baryumzout der gomachtige modificatie van BERZELIUS (dat tevens, zelfs in kokend water weinig oplosbaar is).

Parabrandigdruivenzuur tegenover phenylhydrazine [3]). Het onderzoek aangaande de omzetting van brandigdruivenzuur in parabrandigdruivenzuur is vervolgd, en thans meer in quantitatieven zin. De drie volgende proeven vormen als 't ware een geheel.

1. Een hoeveelheid van 0,597 gr. gefractionneerd brandigdruivenzuur werd gedaan bij 25 gr. barytwater, vermengd met 19 gr. eener oplossing van zoutzure phenylhydrazine (0,45 gr. in 16 gr. water), vooral vrij sterk zuur gemaakt met verdund zoutzuur (de eerste massa werd gedaan bij de laatste zure oplossing. Er werd verkregen 0,486 gr. aan hydrazonbrandigdruivenzuur [4]). Deze proef was meer een contrôle-proef.

2. Dezelfde hoeveelheid gefract. brandigdruivenzuur werd thans behandeld met 25 gr. barytwater, en dadelijk gefiltreerd; en gedaan bij het neêrslag en het gefiltreerde vocht (ieder *afzonderlijk*) van de oplossing van zoutzure phenylhydrazine met verdund zoutzuur, en wel bij neêrslag en filtraat ieder de helft der hoeveelheid van proef 1.

Het filtraat gaf 0,029 gr. aan hydrazonbrandigdruivenzuur, en wat opmerkingswaardig is, het neêrslag (*niet* doorgespoeld, omdat dit onder deze omstandigheden vrij oplosbaar is [5])) leverde op 0,043 gr. van dezelfde verbinding. Waarschijnlijk is wel niet, dat dit neêrslag meer vloeistof zou hebben teruggehouden dan het filtraat. Het ontstaan aanvankelijk van een basische verbinding van brandigdruivenzuur, dan tamelijk weinig oplosbaar zijnde, is mogelijk, maar de hoeveelheid van 0,043 gr. staat nog al ver af van de theoretische hoeveelheid, die, 0,486 gr. bedraagt (zie vroeger).

3. Dezelfde hoeveelheid gefract. brandigdruivenzuur en baryt-

---

1) Ann. Phys. u. Chem. Bd. 36 S. 12 (1835).

2) l. c. S. 16.

3) Zie l. c. Verhand. Kon. Akad. I. 36.

4) l. c. Verhand. Kon. Akad. I. 36.

5) l. c. Verhand. Kon. Akad. I. 33.

water, maar thans 17 dagen aan zich zelf overgelaten, werd daarna vermengd met een gelijke hoeveelheid zoutzure phenylhydrazine en verdund zoutzuur. Er had geen vorming plaats van hydrazonbrandigdruivenzuur, zoodat mag worden aangenomen, dat al het brandigdruivenzuur was omgezet.

Zooals blijkt, kan de omzetting volkomen zijn, maar daartoe wordt nog al tijd gevorderd.

Besluit. De uitkomsten der onderzoekingen in deze Verhandeling medegedeeld, schijnen aldus te kunnen worden teruggegeven.

1. De baryum-verbinding afgeleid van *oplosbaar* product, en zoo ook van *onoplosbaar* product, geeft met *azijnzuur* (ook met salpeterzuur), en voor zooverre *oplosbaar* product aangaat ook met *baryumacetaat*, *twee* lichamen, te weten een *kristallijne* baryumverbinding *(A)*, en een verbinding die optreedt in den vorm van *plaatjes (B)* (waarschijnlijk eveneens kristallijn; zie een weinig verder).

Het kristallijne lichaam [1]) *(A)* geeft na oplossing in verdund salpeterzuur met zilvernitraat *zuringzuur zilver* [2]) (verbinding *A* bevat wat meer waterstof dan overeenkomt met de formule $C_2\,O_4\,Ba + H_2\,O$; geeft overigens ontleed met verdund zoutzuur, enz., *zuringzuur* [3])).

Het lichaam in plaatjes [4]) is waarschijnlijk gekristalliseerd, want somwijlen zet zich een stof af optredende in *spheroïden*, van dezelfde samenstelling en eigenschappen.

Het lichaam in plaatjes is weinig oplosbaar zelfs in warm water. Met zilvernitraat vormt het bij verwarming een zilverspiegel.

Vele analysen werden gedaan van het lichaam in *plaatjes*, zoowel van *oplosbaar* als *onoplosbaar* product, maar het zuur van dit lichaam is nog niet op afdoende wijze gedetermineerd (door gebrek voor 't oogenblik aan de noodige hoeveelheid stof). Dit zuur treedt op in kristallijnen staat, en is bijv. zeer oplosbaar in water.

2. De vraag is opgeworpen [5]), of de oorspronkelijke baryumverbindingen van *oplosbaar* en *onoplosbaar* product mengsels zijn of ieder een chemische verbinding van een zuur (in dat geval zijnde het zuur, waarvan *zuringzuur* afstamt, en het zuur van het lichaam in plaat-

---

[1]) Zie deze Verhandeling pag. 1.

[2]) l. c. pags. 8, 9.

[3]) l. c. pag. 7.

[4]) l. c. pag. 11, 14.

[5]) l. c. p. 9, 21.

jes). Pogingen werden in 't werk gesteld, om dit zuur af te zonderen [1]), en tevens eenigzins de verhouding der oorspronkelijke baryumverbindingen tegenover water nagegaan [2]). Ook werd de moedervloeistof dezer verbindingen niet voorbijgegaan [3]). De invloed van den colloïdalen toestand, bestaande wellicht voor eenige verbindingen in de waterige oplossing van *oplosbaar* en *onoplosbaar* product, werd in 't kort behandeld [4]).

3. De vraag is *experimenteel* nagegaan, of het *chloor* van *oplosbaar* product (en dus hoogst waarschijnlijk tevens van onoplosbaar product) daarin aanwezig is als chloornatrium of bijv. als aethylchloride; de uitkomst is, dat het *chloor* waarschijnlijk als *chloornatrium* er in voorkomt.

Door elimineeren in de analytische gegevens van oplosbaar product, van het chloor als chloornatrium, en substitutie van het terugblijvende natrium door waterstof, houdt men over, een samenstelling vrij wel overeenkomende met die van den wijnsteenzuren ester, waarvan werd uitgegaan.

Het chloornatrium is waarschijnlijk verbonden met den natriumafgeleide van het ketonzuur [5]) (zijnde voor *oplosbaar* product wellicht de aethylester van monaethyl-tartrylwijnsteenzuur, en voor *onoplosbaar* product de ester van tartrylwijnsteenzuur).

Men heeft de vraag behandeld betreffende de vorming van zuringzuur [6]) door *oplosbaar* en *onoplosbaar* product; verder de *stabiliteit* [7]) van oplosbaar en onoplosbaar product, en de afwezigheid in deze producten van wijnsteenzuur [8]).

Er is een kleine wijziging gebracht in de bereiding van dinatrium- en mononatrium-wijnsteenzuur aethyl [9]). Er is een theoretisch gedeelte [10]) gegeven, en een overzicht [11]) van den weg tot nog toe ingeslagen bij de behandeling van het onderwerp.

4. *Parabrandigdruivenzuur* [12]). Wordt brandigdruivenzuur neêrgeslagen met een overmaat van barytwater, en het neêrslag behandeld met een zekere hoeveelheid azijnzuur, dan blijft een betrekkelijk

---

1) l. c. p. 20, 25.
2) l. c. p. 22.
3) l. c. p. 23.
4) l. c. p. 23.
5) l. c. p. 23.
6) l. c. p. 29.
7) l. c. p. 30.
8) l. c. p. 30.
9) l. c. p. 30.
10) l. c. p. 31.
11) l. c. p. 32.
12) l. c. p. 39.

groote hoeveelheid terug van een lichaam der formule, uitgedrukt in die van brandigdruivenzuur: $(CH_3\,CO.\,CO.\,O)_2\,Ba + H_2\,O$ (verhit tot 110°). Dit lichaam is bijkans onoplosbaar in water, en kan dus niet wel hetzelfde wezen als het neutrale hydruvinezuur baryum van Böttinger, dat naar dezen scheikundige in water zeer oplosbaar is.

In vrijen toestand vertoont zich dit zuur, *parabrandigdruivenzuur* genoemd, meer of min als een gomachtige massa. Men veronderstelt, dat de *amorphe zouten* zoogenaamd van brandigdruivenzuur (de gomachtige modificatie van Berzelius) dit zuur, namelijk *parabrandigdruivenzuur*, bevat (dat *niet* inwerkt op zoutzure phenylhydravine [1]). Ingeval dit zoo is, dan zou gemeld baryumzout hetzelfde zijn als het gomachtige baryumzout (van brandigdruivenzuur zoogenaamd) van Berzelius. Dit onderzoek moet vervolgd worden, en in de eerste plaats worden uitgemaakt, of het molecuul water een integreerend bestanddeel uitmaakt van het parabrandigdruivenzuur, dat wellicht niet anders is dan een polymeer van brandigdruivenzuur.

Aanhangsel. Het onderwerp maakte het wenschelijk, om eenige eigenschappen van andere verbindingen nategaan, waarvan de uitkomst nader hier volgt.

1. *Colloïdaal wijnsteenzuur en zuringzuur baryum* [2]). Een mengsel van wijnsteenzuur en brandigdruivenzuur werd nêergeslagen met barytwater, en aangetoond, dat de aanwezigheid van brandigdruivenzuur den aanvankelijk colloïdalen toestand van wijnsteenzuur baryum in groote mate bestendigt. Meer of min is dit tevens het geval met *zuringzuur* [3]) en brandigdruivenzuur, met baryt. Zuringzuur schijnt tegenover wijnsteenzuur juist een tegenovergestelde uitwerking te hebben.

2. Het is waarschijnlijk, dat de colloïdale toestand van zouten in het leven der plant een niet onbelangrijke rol heeft te vervullen [4]).

In een volgende Verhandeling zullen de uitkomsten van een nader onderzoek met betrekking tot het ketonzuur, afgeleid van wijnsteenzuur, worden medegedeeld, en zoo ook die van parabrandigdruivenzuur.

[1]) l.c. p. 39.
[2]) l.c. p. 33.
[3]) l.c. p. 34.
[4]) l.c. p. 35.

Utrecht, 26 Mei 1894.

BOEKDRUKKERIJ
de Roever Kröber & Bakels
AMSTERDAM.